

EDUARDO HENRIQUE CRUCIANI

**PROJETO TERMODINÂMICO DO SISTEMA DE PROPULSÃO E
SÍNTESE DO CONTROLADOR DE UM MÍSIL**

São Paulo

2014

EDUARDO HENRIQUE CRUCIANI

**PROJETO TERMODINÂMICO DO SISTEMA DE PROPULSÃO E
SÍNTESE DO CONTROLADOR DE UM MÍSIL**

Trabalho apresentado para a
graduação no curso de Engenharia
Mecânica da Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Área de concentração: escoamento
compressível

Orientador: Prof. Dr. Marcos de
Mattos Pimenta

São Paulo

2014

Cruciani, Eduardo Henrique

Projeto termodinâmico do sistema de propulsão e síntese de controlador de um míssil / E.H. Cruciani. – São Paulo, 2014. 228 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Sistemas de propulsão 2.Controle moderno 3.Dinâmica de corpos rígidos 4.Escoamento compressível I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

O presente trabalho tem como escopo fornecer um método para o projeto do sistema de propulsão e de controle de mísseis balísticos. Para tanto, inicialmente desenvolve-se toda a teoria necessária para o projeto do bocal, no caso bidimensional, baseando-se nos métodos das características para determinação do perfil para o comprimento mínimo, bem como na solução das equações diferenciais que regem o fenômeno bidimensionalmente e quasi-unidimensionalmente. O primeiro tem o fim de avaliar o efeito da camada limite na geometria e determinação de materiais no bocal, o segundo representar a dinâmica de escape dos gases de maneira adequada e simplificada. Também é feita alusão ao processo de combustão de combustíveis sólidos a fim de se determinar a temperatura na câmara de combustão bem como a sua dinâmica de queima, necessária para estimar o empuxo fornecido. Por fim, no que se refere ao sistema de propulsão, simulações bidimensionais considerando escoamento turbulento também foram feitas. A aplicação dos métodos por meios computacionais é feita e seus resultados validados em comparação com outros apresentados na bibliografia. Quanto ao controle, inicialmente é feito um modelo dinâmico do míssil e em seguida todo o desenvolvimento da síntese do controlador de tal forma que o artefato mantenha-se na trajetória pré-determinada, rejeitando distúrbios ao longo do caminho.

Palavras-chave: Fluidos compressíveis. Bocal bidimensional.. Método das características. Combustão. Mísseis. Dinâmica dos Fluídos Computacional.

ABSTRACT

This report aims to provide a method to design the propulsion and control systems for a ballistic missile. For this purpose, initially the whole theory which serves as background for the nozzle design is reviewed based on the characteristics and hodograph methods. Allusion to combustion is also provided since it is of the utmost importance to determine the temperature inside the combustion chamber as well as its burn dynamics provides means to evaluate the maximum thrust to be provided. The computational simulations of the methods for the nozzle design are made and its results are compared to the ones found on the bibliography in order to validate the models. Still considering the propulsion system, turbulent bidimensional flow through the nozzle were also simulated for the sake of studying differences among different geometries. Concerning the control, what is sought is the maintenance of a pre-described trajectory, rejecting all the disturbances during the movement, hence a dynamic model is presented and based on it all the control synthesis is made.

Keywords: Compressible fluids. Bidimensional nozzle. Characteristics method. Combustion. Missiles. Computational Fluid Dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 -	Cronograma do Projeto	22
Figura 4.1 -	Configuração usual de um sistema de propulsão por combustível sólido	23
Figura 4.2 -	Configurações possíveis da montagem do grão-propelente	24
Figura 4.3 -	Configurações da câmara de combustão para aplicações específicas	25
Figura 4.4 -	Variadas geometrias de grão-propelente e respectivas curvas em função do tempo	27
Figura 4.5 -	Taxa de queima em função da pressão no interior da câmara de combustão	29
Figura 4.6 -	Fases do processo de ignição de combustíveis sólidos	32
Figura 4.7 -	Regiões típicas durante a queima de um propelente sólido homogêneo	35
Figura 4.8 -	Variação da temperatura na superfície do grão-propelente em função da pressão de reação	43
Figura 4.9 -	Malha fluida com linha característica	48
Figura 4.10 -	Ponto A de um escoamento se movendo instantaneamente na direção θ em relação a horizontal	52
Figura 4.11 -	Linhas características para o escoamento supersônico	54
Figura 4.12 -	Linhas características internas a um escoamento	58
Figura 4.13 -	Ponto de parede	60
Figura 4.14 -	Representação de um bocal convergente-divergente e suas linhas de Mach	63
Figura 4.15 -	Bocal divergente curto	63
Figura 4.16 -	Representação física do escoamento	67
Figura 4.17 -	Representação do problema no plano hodográfico	68
Figura 4.18 -	Problema apresentado no plano $\theta x \mathbf{u} $	71
Figura 4.19 -	Bocal quase-unidimensional convergente-divergente	72
Figura 4.20 -	Distribuição das forças relacionadas as pressões atuantes no	

	elemento fluído	74
Figura 5.1 -	Modelo simplificado de um sistema de propulsão de combustível sólido	89
Figura 5.2 -	Exemplo de geometria de um bocal divergente e de suas características	96
Figura 5.3 -	Pontos de intersecção com a linha de centro	101
Figura 5.4 -	Determinação da posição dos pontos internos da malha interior ao bocal	103
Figura 5.5 -	Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção entre a parede do bocal e as linhas características	105
Figura 5.6 -	Discretização linear do bocal convergente-divergente	110
Figura 5.7 -	Entrada e saída do bocal	115
Figura 5.8 -	Geometria do bocal divergente calculada	121
Figura 5.9 -	Interpolação de polinômio de 2º grau	121
Figura 5.10 -	Interpolação de polinômio de 3º grau	122
Figura 5.11 -	Interpolação de polinômio de 4º grau	122
Figura 5.12 -	Perfil proposto para avaliação do problema de esvaziamento da câmara de combustão	123
Figura 5.13 -	Modelo Físico do Míssil	124
Figura 5.14 -	Convenção para as rotações do sistema fixo ao corpo em relação ao inercial segundo os ângulos de Euler	125
Figura 5.15 -	Deflexões das superfícies de controle	133
Figura 5.16 -	Malha estruturada (extraído de Saltara, 2014)	148
Figura 5.17 -	Malha grosseira para o caso do bocal de geometria ótima	150
Figura 5.18 -	Malha refinada para o caso do bocal de geometria ótima	151
Figura 5.19 -	Malha grosseira para o caso do bocal cônico	151
Figura 5.20 -	Malha refinada para o caso do bocal cônico	151
Figura 6.1 -	Comportamento da pressão no interior da câmara de combustão em função do tempo de queima do propelente	153
Figura 6.2 -	Resultado da variação de pressão no interior da câmara de combustão obtido por Nieble (1996)	154
Figura 6.3 -	Comportamento da pressão no interior da câmara de combustão em função do tempo de queima do grão	

	propelente	156
Figura 6.4 -	Resultado da variação no interior da câmara de combustão obtido por Nieble (1996)	157
Figura 6.5 -	Empuxo em função do tempo de queima para o caso de simulação 1	158
Figura 6.6 -	Empuxo em função do tempo de queima para o caso de simulação 2	159
Figura 6.7 -	Bocal divergente com parâmetros fornecidos em Anderson (2003)	160
Figura 6.8 -	Curvas características de meio bocal plano	162
Figura 6.9 -	Bocal divergente com parâmetros fornecidos em Hodge (1995)	164
Figura 6.10 -	Variação da temperatura adimensional em cada ponto do domínio fluído ao longo da simulação	169
Figura 6.11 -	Variação da densidade adimensional em cada ponto do domínio fluído ao longo da simulação	169
Figura 6.12 -	Variação da velocidade adimensional em cada ponto do domínio fluído ao longo da simulação	170
Figura 6.13 -	Convergência da variável velocidade adimensional	178
Figura 6.14 -	Convergência da variável temperatura adimensional	179
Figura 6.15 -	Convergência da variável densidade adimensional	179
Figura 6.16 -	Variação da pressão no interior da câmara de combustão com o tempo	180
Figura 6.17 -	Variação da pressão no interior da câmara de combustão	182
Figura 6.18 -	Variação do empuxo	182
Figura 6.19 -	Perfil do bocal supersônico	183
Figura 6.20 -	Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa	184
Figura 6.21 -	Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina	185
Figura 6.22 -	Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa	185
Figura 6.23 -	Detalhe do perfil de velocidades para o caso do bocal cônico	

	com fluido viscoso e malha grossa	186
Figura 6.24 -	Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina	186
Figura 6.25 -	Detalhe do perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina	187
Figura 6.26 -	Perfil de velocidades para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina	187
Figura 6.27 -	Perfil de velocidades para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina	188
Figura 6.28 -	Detalhe do perfil de velocidades para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina	188
Figura 6.29 -	Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa	189
Figura 6.30 -	Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina	189
Figura 6.31 -	Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa	190
Figura 6.32 -	Detalhe do perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa	190
Figura 6.33 -	Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina	191
Figura 6.34 -	Detalhe do perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina	191
Figura 6.35 -	Perfil do número de Mach para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina	192
Figura 6.36 -	Perfil do número de Mach para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina	192
Figura 6.37 -	Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa	193
Figura 6.38 -	Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina	193
Figura 6.39 -	Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa	194

Figura 6.40 - Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina	194
Figura 6.41 - Perfil de pressão para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina	195
Figura 6.42 - Perfil de pressão para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina	195
Figura 6.43 - Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa	196
Figura 6.44 - Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina	196
Figura 6.45 - Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa	197
Figura 6.46 - Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina	197
Figura 6.47 - Perfil de temperaturas para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina	198
Figura 6.48 - Perfil de temperaturas para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina	198
Figura 6.49 - Contornos de número de Mach para a geometria ótima com raio de curvatura entre a garganta e porção divergente maior	
Figura 6.50 - Diferentes contornos de bocal e o escoamento no interior dos mesmos (Östlund, 2002)	199
Figura 6.51 - Perfil do escoamento antes e após a separação de choque livre. Nota-se a presença da região central de expansão que permanece presente e de acordo com a verificação em simulações (Östlund, 2002)	199 200
Figura 6.52 - Contornos do número de Mach de um jato deixando o bocal convergente-divergente cônico com razão de pressão 10 entre a entrada e a região ao longe	201 202
Figura 6.53 - Bocal com expansão externa (Östlund, 2002)	203
Figura A.1 - Simulação em malha aberta para uma entrada tipo impulso unitário em cada uma das entradas	214

Figura A.2 -	Simulação em malha aberta para uma entrada tipo degrau unitário em cada uma das entradas	215
Figura A.3 -	Simulação em malha fechada (alocação de polos) para uma entrada tipo degrau unitário em cada uma das entradas	216
Figura A.4 -	Simulação em malha fechada (alocação de polos) para uma entrada tipo impulso unitário em cada uma das entradas	217
Figura A.5 -	Simulação em malha fechada (LQR) para uma entrada tipo impulso unitário em cada uma das entradas	219
Figura A.6 -	Simulação em malha fechada (LQR) para uma entrada tipo degrau unitário em cada uma das entradas	220
Figura A.7 -	Polos em malha aberta	222
Figura A.8 -	Polos obtidos por alocação de polos	222
Figura A.9 -	Polos obtidos por LQR	223
Figura A.10-	Ângulo de arfagem por LQR	224
Figura A.11-	Ângulo de arfagem por alocação de polos	224
Figura A.12-	Velocidade angular de arfagem por LQR	225
Figura A.13-	Velocidade angular de arfagem por alocação de polos	225
Figura A.14-	Velocidade na direção z por LQR	226
Figura A.15-	Velocidade na direção z por alocação de polos	226

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 -	Coeficientes usuais para o modelo $k - \epsilon$ standard	84
Tabela 4.2 -	Coeficientes usuais para o modelo $k - \epsilon$	86
Tabela 4.3 -	Coeficientes usuais para o modelo $k - \epsilon$ SST	87
Tabela 6.1 -	Dados para o caso 1 do modelo	152
Tabela 6.2 -	Dados para o caso 2 do modelo	155
Tabela 6.3 -	Parâmetros (Anderson, 2003)	160
Tabela 6.4 -	Dados calculados pelo programa segundo os valores de entrada da tabela 6.3	161
Tabela 6.5 -	Valores de cada ponto das características da figura 6.8	162
Tabela 6.6 -	Parâmetros (Hodge, 1995)	163
Tabela 6.7 -	Dados calculados pelo programa segundo os valores de entrada da tabela 6.5	164
Tabela 6.8 -	Solução de Hodge (1995) (a definição de $K+$ e $K-$ em Hodge é invertida quando comparada a Anderson, 2003)	166
Tabela 6.9 -	Comparação da razão de áreas calculada para o caso unidimensional e bidimensional	167
Tabela 6.10	Parâmetros do modelo apresentado por Anderson (1995) para um bocal quase-unidimensional	168
Tabela 6.11	Resultados obtidos pelo autor a partir da simulação do caso exposto no capítulo 7 de Anderson (1995) para o instante 0 de simulação	171
Tabela 6.12	Resultados expostos no capítulo 7 de Anderson (1995) para o instante 0 de simulação	172
Tabela 6.13	Resultados obtidos pelo autor a partir da simulação do caso exposto no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1º passo de simulação	173
Tabela 6.14	Resultados expostos no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1º passo de simulação	174

Tabela 6.15	Resultados obtidos pelo autor a partir da simulação do caso exposto no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1400º passo de simulação	175
Tabela 6.16	Resultados expostos no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1400º passo de simulação	176
Tabela 6.17	Dados da combustão de Ballistile (TU Delft, 2014)	177
Tabela 6.18	Dados físicos do problema	177
Tabela 6.19	Taxa de queima do KNDX, KNSB fino e KNSU	181
Tabela 6.20	Propriedades do KNDX, KNSB fino e KNSU	181
Tabela 6.21	Condições de contorno	184

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
2. RESUMO DO PROJETO E OBJETIVOS DO PROJETO.....	18
3. ORGANIZAÇÃO E DESENVOLVIMENTO	19
4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
4.1. COMBUSTÍVEIS SÓLIDOS	23
4.1.1. Aspectos gerais	23
4.1.2. Formatos de grão	27
4.1.3. Taxa de queima	28
4.1.4. Combustão de combustíveis sólidos	30
4.1.4.1. Ignição	30
4.1.4.2. O processo de combustão	34
4.1.4.3. Combustíveis sólidos homogêneos	34
4.1.4.4. Combustíveis sólidos compostos	38
4.2. ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL	43
4.2.1. Fundamentos	43
4.2.2. Método das características	47
4.2.2.1. Pontos internos da malha	58
4.2.2.2. Pontos de parede	60
4.2.3. Aplicação na determinação da geometria da parede de bocais de mínimo comprimento	62
4.3. PROJETO DE BOCAL CONVERGENTE PELO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO HODOGRÁFICA	65
4.4. ESCOAMENTO QUASE-UNIDIMENSIONAL EM BOCAIS CONVERGENTE-DIVERGENTE	71
4.5. ESCOAMENTOS TURBULENTOS	78
4.5.1. Conceitos fundamentais	78
4.5.2. Modelos de turbulência	82
4.5.2.1. O modelo $k - \epsilon$ standard	82
4.5.2.2. O modelo $k - \omega$	85
4.5.2.3. Modelo $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport)	86

5. METODOLOGIA	89
5.1. MODELOS FÍSICO E MATEMÁTICO PARA AVALIAÇÃO DA QUEIMA DE UM PROPELENTE SÓLIDO	89
5.1.1. Determinação da pressão na câmara de combustão em função do tempo	89
5.1.2. Determinação do empuxo num bocal unidimensional	93
5.2. PROJETO BIDIMENSIONAL DE UM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE	95
5.2.1. Projeto da porção divergente pelo método das características	95
5.2.1.1. <i>Determinação dos valores de θ, ν, K_+, K_-, M e μ</i>	<i>95</i>
5.2.1.2. <i>Determinação das coordenadas de cada ponto de intersecção</i>	<i>101</i>
5.2.1.3. <i>Determinação dos pontos de intersecção entre as linhas características e a parede do bocal</i>	<i>105</i>
5.3. DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO TRANSIENTE PARA UM BOCAL QUASE-UNIDIMENSIONAL	108
5.3.1. Desenvolvimento das equações adimensionalizadas	108
5.3.2. Aplicação do método de diferenças finitas	110
5.4. APLICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO BOCAL QUASE-UNIDIMENSIONAL AO PROBLEMA DE Esvaziamento da câmara de combustão	118
5.4.1. Implementação computacional	119
5.4.2. Determinação do perfil	120
5.5. MODELO DINÂMICO	123
5.5.1. Obtenção do modelo dinâmico não-linear	123
5.5.2. Linearização das equações de movimento	134
5.6. SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO VISCOSO NO INTERIOR DO BOCAL	146
5.6.1. Conjunto de equações adotado	146
5.6.2. Funções de interpolação	147
5.6.3. Escolha do fluído	149
5.6.4. Malhas e estratégias de simulação	150
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	152

6.1. AVALIAÇÃO UNIDIMENSIONAL PRELIMINAR	152
6.1.1. Pressão no interior da câmara de combustão	152
6.1.1.1. Caso 1	153
6.1.1.2. Caso 2	153
6.1.2 empuxo	157
6.2. PROJETO BIDIMENSIONAL DO BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE	160
6.2.1. Projeto da porção supersônica pelo método das características ..	160
6.3. ESCOAMENTO TRANSIENTE EM BOCAL QUASE-UNIDIMENSIONAL	168
6.3.1. Validação do modelo	168
6.3.2. Aplicação a uma geometria de bocal especificada	177
6.4. DIMENSIONAMENTO DO BOCAL	181
6.5. ESTUDO DO EFEITO DA VISCOSIDADE EM BOCAIS CONVERGENTES-DIVERGENTES	183
6.5.1. Perfis de velocidade	184
6.5.2. Perfis de número de Mach	189
6.5.3. Perfis de pressão estática	193
6.5.4. Perfis de temperatura estática	196
6.5.5. Alteração da geometria da garganta	199
6.5.6. Discussões	200
7. CONCLUSÃO	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	207
APÊNDICE A PROJETO DO CONTROLADOR	210
A.1. OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE	212
A.1.1. Análise de controlabilidade	212
A.1.2. Análise de observabilidade	212
A.2. SÍNTESE DO REGULADOR	213
A.2.1. Alocação de polos	213
A.2.2. Regulador Linear Quadrático	218
A.3.2ª SÍNTESE DE REGULADOR	221

A.3.1. Polos do sistema em malha aberta e malha fechada	221
A.3.2. Simulação do comportamento do sistema a uma subida	223

1. INTRODUÇÃO

Mísseis são importantes e estratégicos dispositivos de defesa amplamente difundidos no globo, utilizados por órgãos de defesa de todas as nações do mundo. Algumas são suas configurações e tipos podendo-se citar mísseis de cruzeiro, que dispensam quaisquer esforços de comando, sendo pilotados automaticamente; e também mísseis estratégicos que podem ser despejados de aeronaves atingindo o solo ou mesmo lançados a partir de silos, tal como os mísseis balísticos, objeto de estudo do presente trabalho.

Em geral tais artefatos possuem um sistema de propulsão tal qual o de foguetes, isto é, simplificada mente uma câmara de combustão e um bocal, por onde os gases oriundos do processo de combustão são acelerados, fornecendo o empuxo necessário para decolagem e possibilidade de atingir o alvo especificado. O combustível pode ser líquido ou sólido, sendo o primeiro de projeto bem mais complicado dada a necessidade de bombeamento de comburente e combustível de maneira dosada de acordo com as necessidades operacionais desejadas. O combustível sólido possui características de projeto bastante simplificadas além de possibilidade de controle do processo de combustão dado tanto pela geometria do grão-propelente como pelo controle do bocal, possibilitando alguma autonomia no que tange o controle da taxa de queima e de posição.

Todos estes mísseis possuem um sistema de controle, seja ele completamente embarcado, como no caso de um míssil balístico (Siouris, 2004) cujo sistema de navegação inercial; ou controlado a distância através de uma central. Naturalmente há necessidade de sensores e atuadores para que tal seja possível, bem como, no caso de mísseis balísticos, determinação prévia da trajetória a fim de fornecer informações relevantes para a determinação do sistema de propulsão, tal como empuxo necessário.

Para o caso específico de mísseis balísticos, alguns aspectos devem ser levados em consideração tendo em vista seu caráter dificultador no processo de síntese do controlador, sejam eles a variação de massa no processo de decolagem

e os vários ambientes no qual este dispositivo transita, desde um ambiente atmosférico até fora da atmosfera, sendo necessário considerar estas interfaces e seus efeitos quanto aos modelos a serem considerados.

O presente trabalho visa modelar um sistema de propulsão para um míssil tático, levando em conta a queima de combustível sólido e escoamento compressível através de um bocal, sendo este feito de maneira genérica a fim de possibilitar o estudo de uma variada gama de configurações que eventualmente podem levar a resultados análogos no que tange o empuxo necessário gerado. Também será apresentada a síntese de um regulador para um fim específico, sendo necessário o equacionamento de modelos dinâmicos, sensores e atuadores.

2. RESUMO E OBJETIVOS DO PROJETO

O presente projeto diz respeito ao projeto de alguns dos subsistemas típicos de um míssil. Estes são o sistema de propulsão e o sistema de controle, essenciais para o fim de tal dispositivo.

Tal tema de trabalho foi escolhido segundo sua abrangência no que diz respeito a sua multidisciplinaridade segundo os temas tratados durante a graduação em engenharia mecânica. Para a realização de tal é necessária aplicação de conhecimentos relacionados a grande área térmica, principalmente àqueles relacionados ao escoamento de fluídos compressíveis e processos de combustão. Além destes, o modelo matemático da dinâmica envolve algum conhecimento de mecânica vetorial ou variacional bem como alguns princípios de escoamento externo para a determinação de forças de natureza aerodinâmica. A aplicação da teoria de controle também é algo ser observado tendo em vista seu caráter essencial para tais dispositivos, sendo esta uma disciplina de importância para a graduação.

A adoção deste tema também visa possibilitar a aprendizagem de conceitos e teorias de interesse do autor e que não estão inseridas no conteúdo do curso de graduação. O aprofundamento em alguns temas de interesse também é um fator determinante, sendo em especial a abordagem bidimensional de escoamentos compressíveis um interesse particular do autor, tema este não abordado no curso de escoamento compressível ministrado em nível de graduação.

Quanto ao escopo do trabalho, o que se pretende é fornecer um ferramental matemático para a avaliação do sistema de propulsão típico de foguetes, possibilitando cálculos de empuxo, taxa de queima de combustível, pressão no interior da câmara de combustão, dentre outros parâmetros, para casos genéricos. Adicionalmente, deseja-se fornecer meios ou metodologia para a síntese de sistemas de controle para mísseis de tal natureza.

3. ORGANIZAÇÃO E DESENVOLVIMENTO

O trabalho como um todo pode ser dividido em três grandes partes: sistema de propulsão, sistema de controle (ou de ação). Cada um será desenvolvido em tempos distintos, mas com intercomunicação, principalmente entre a propulsão e o controle, tendo em vista uma dependência clara do segundo em relação ao primeiro na etapa de decolagem até o escape da atmosfera. Também o sistema de carga explosiva com o sistema de controle, tendo em vista que deve haver um momento exato (o de impacto) no qual tal explosivo deve detonar.

O primeiro ciclo de trabalho envolverá o equacionamento e simulação de um sistema de propulsão típica de foguetes para o artefato em questão. Para tanto alguns requisitos básicos devem ser levados em consideração para uma efetiva modelagem de tal sistema. Em princípio, uma avaliação acerca do combustível sólido é de fundamental importância tendo em vista que este governa a pressão de gases de combustão no interior da câmara de combustão, característica que tem influência direta no desempenho deste subsistema fundamental. Desta forma, inicialmente uma revisão bibliográfica acerca do assunto será feita, levantando, a princípio, aspectos básicos de um combustível sólido dentre os quais se destacam os formatos de grãos e sua influência no processo de combustão; taxa de queima e sua relação com a pressão do interior da câmara de combustão; processo de combustão de um combustível sólido para variadas composições, avaliando-a qualitativamente e quantitativamente, traçando paralelos entre os diferentes combustíveis existentes. Também um levantamento acerca das tensões no grão bem como processo de transferência de calor para o invólucro também devem ser abordados a título de conhecimento.

Concomitantemente ao levantamento de tais dados, uma avaliação das taxas de combustão para algumas geometrias e composições diferentes de combustível será feita a partir de simulação numérica, levantando gráficos e comparando-os no que diz respeito, principalmente, à pressão no interior da câmara de combustão. Inicialmente, levantar-se-á um modelo simples de motor a partir da associação da

expressão para determinação da pressão no interior da câmara de combustão dada a taxa de queima do combustível e um bocal unidimensional, avaliando quantitativamente o empuxo gerado bem como pressões e temperatura no bocal segundo a queima do combustível. Pretende-se ter estimativas genéricas com este modelo, sofisticando-o numa etapa subsequente do projeto. Por fim, pretende-se fazer, ainda nesta primeira etapa do projeto, levantamentos quantitativos da combustão destes combustíveis no que diz respeito ao calor envolvido no processo de reação.

Conforme supracitado, o modelo inicial de propulsor deve ser sofisticado a fim de se obter melhores estimativas acerca do empuxo a ser fornecido pelo sistema, bem como melhor avaliação de suas características como um todo. Para tanto um modelo de bocal será avaliado à luz da análise bidimensional de escoamentos de fluídos compressíveis, tal como descritos em Shapiro (1953) e Zucrow (1948). Para tanto, inicialmente levantar-se-á tal bibliografia, fazendo alguma revisão sobre e em seguida os conceitos serão aplicados de forma bastante genérica, fornecendo alguma ferramenta computacional que permita a análise de várias condições de escoamento a fim de facilitar o processo de definição do sistema propulsor para a síntese de um controlador para um caso específico.

Para o fim desta análise do sistema de propulsão, uma avaliação da transferência de calor no bocal e na câmara de combustão será feita a fim de possibilitar o fornecimento de estimativas razoáveis para uma eventual seleção de material para o conjunto que possa resistir a tais solicitações térmicas, a princípio julgadas bastante significativas. Naturalmente não somente este efeito será determinante para tal seleção, entretanto no que tange ao estudo termodinâmico de um míssil balístico, que é o que se pretende, tais são de fundamental importância.

Após a conclusão da modelagem de maneira genérica do sistema de propulsão, isto é, confecção de rotinas de simulação parametrizadas de forma a possibilitar a aplicação aos mais variados conjuntos de dados, passar-se-á a determinação do sistema de controle. Neste momento algumas decisões serão de fundamental importância, principalmente àquela relacionada ao como se dará a atuação do sistema de controle. Algumas possibilidades surgem, conforme já visto em Siouris (2004) e Sutton (2001), tais como controle por meio de espécie de flaps

nas aletas de estabilização ou ainda, o que possibilita maior flexibilidade de controle, segundo Siouris (2004), a atuação se dar no próprio bocal por controle da vazão mássica e pelo movimento do bocal segundo direções específicas a fim de controlar a direção do escoamento.

Sabida a atuação e determinados os sensores necessários para o sistema de navegação inercial típico de um míssil, proceder-se-á com a determinação de alguns requisitos básicos para a caracterização do dispositivo, dentre eles citam-se a massa, dimensões, empuxo necessário – o que possibilitará a determinação da geometria e do combustível –, avaliação das forças aerodinâmicas atuantes, dependentes da geometria do modelo, dentre outros. Com estes dados é possível proceder com a modelagem dinâmica do artefato, isto é, com a determinação das equações que regem seu movimento.

Um cronograma completo e atualizado das atividades é fornecido na figura 3.1.

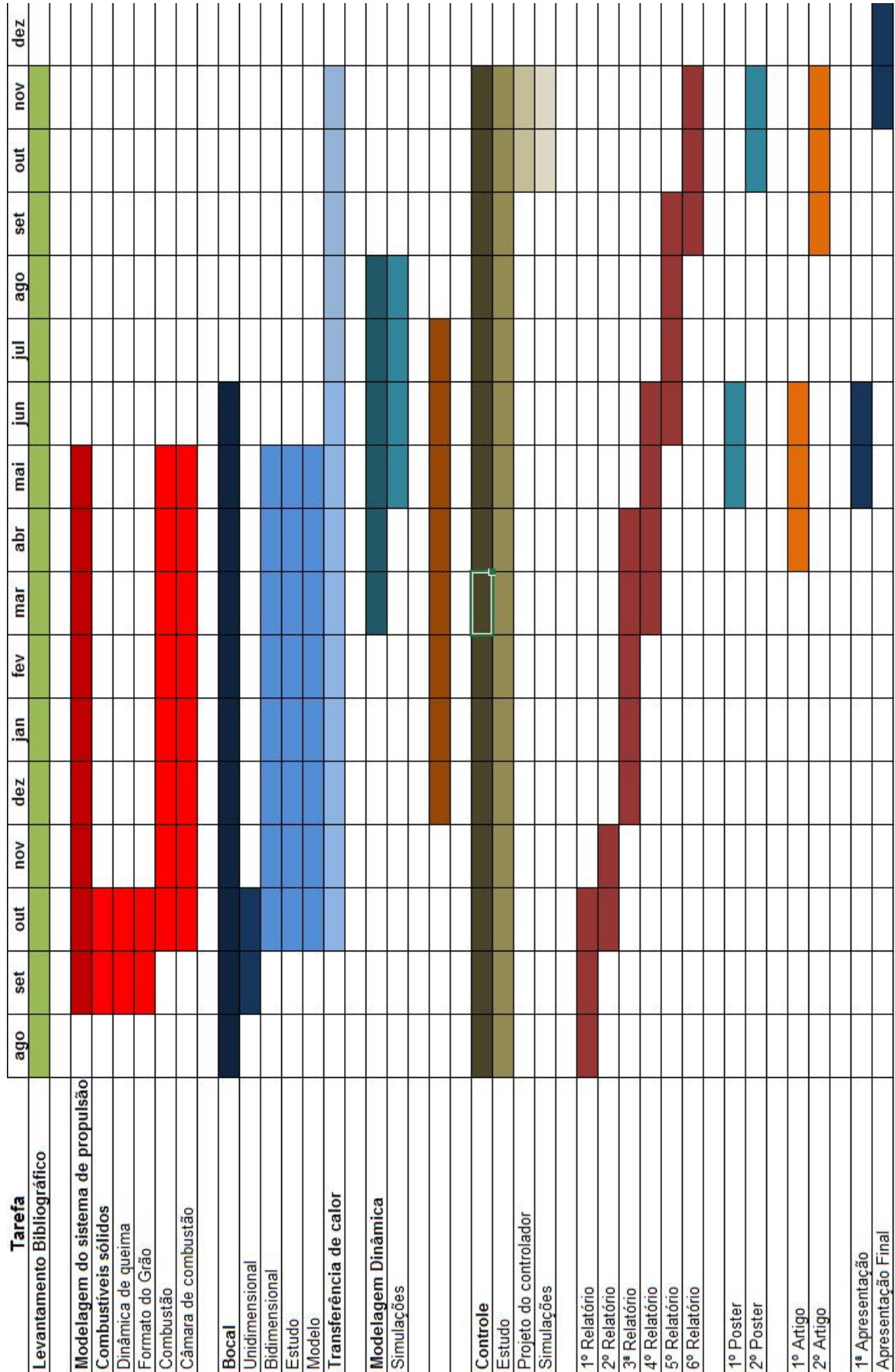


Figura 3.1 – Cronograma do projeto

4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

4.1. COMBUSTÍVEIS SÓLIDOS

4.1.1. Aspectos gerais

Combustíveis sólidos são alternativa aos combustíveis líquidos para a propulsão de foguetes e mísseis, apresentando a vantagem de serem construtivamente mais simples tendo em vista o menor número de componentes na construção do sistema de propulsão. Este, em geral, é composto por uma câmara de combustão na qual o grão-propelente é inserido e um bocal convergente-divergente utilizado para acelerar os gases oriundos do processo de combustão, possibilitando, por meio do princípio da conservação da quantidade de movimento, gerar uma força de empuxo que permite a movimentação do artefato. A figura 4.1 ilustra uma configuração usual de um sistema de propulsão por combustível sólido.

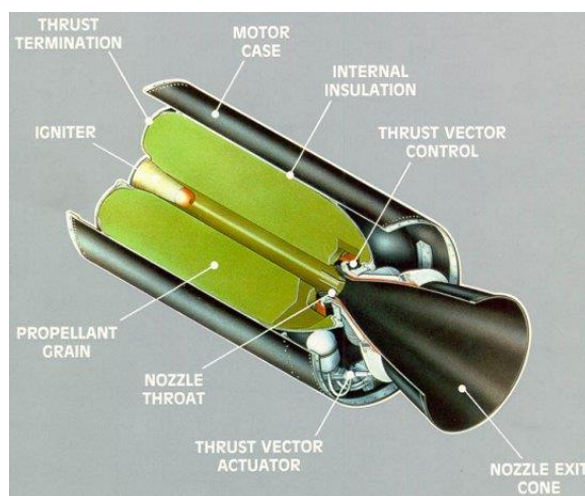


Figura 4.1 – Configuração usual de um sistema de propulsão por combustível sólido (Aerospace Web, 2013)

Construtivamente, segundo Sutton (2001), há duas formas possíveis para a montagem do grão dentro da câmara de combustão: forma de cartucho carregado (*cartridge-loaded*) ou solidário à câmara de combustão (*case-bonded grains*). O primeiro, de montagem mais simples, permite a colocação do grão propelente dentro da carcaça da câmara de combustão, sendo posteriormente fechado com uma segunda peça que já possui o bocal, através de um flange. O segundo já é caracterizado pela produção do grão concomitante a da carcaça da câmara de combustão, sendo este depositado no interior desta, ou seja, a própria câmara de combustão serve de molde para o grão-propelente, sendo este solidário as paredes da câmara ou a isolamento térmica da mesma. A figura 4.2 ilustra tais configurações.

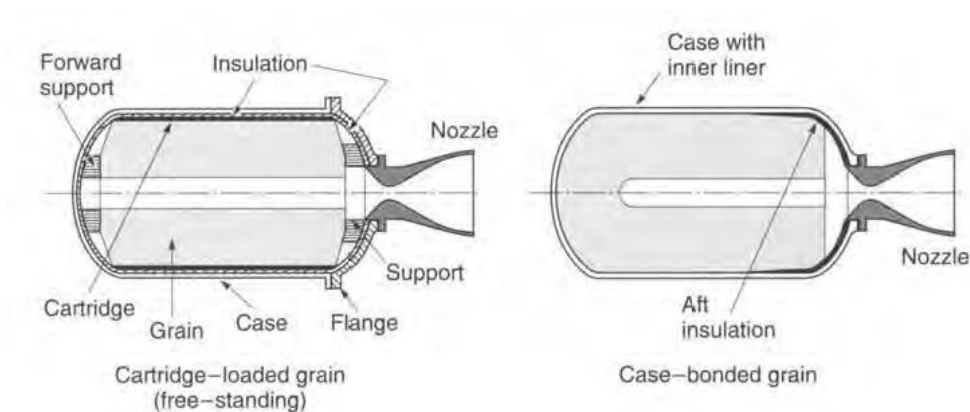


Figura 4.2 – Configurações possíveis da montagem do grão-propelente (Sutton, 2001)

A câmara de combustão pode assumir formas distintas, bem como o grão (conforme será discutido na seção 4.1.2), de acordo com necessidades operacionais distintas, obtidas com queima adequada do propelente. A figura 4.3 ilustra três configurações distintas para o caso de câmaras com o propelente nelas moldado.

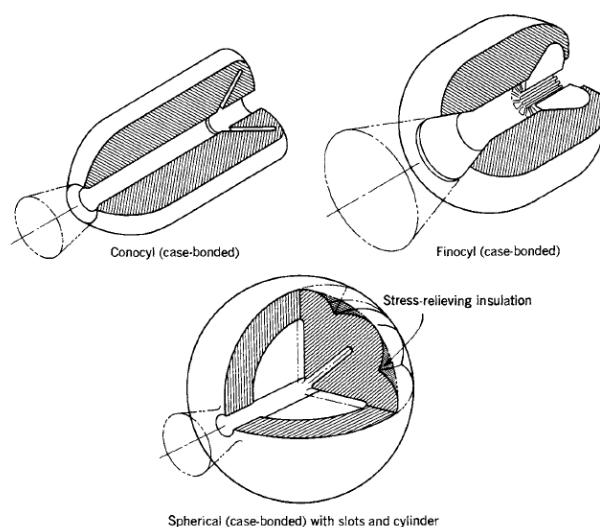


Figura 4.3 – Configurações da câmara de combustão para aplicações específicas (Sutton, 2001)

O grão propelente possui aparência de plástico (Nieble, 1996) e é formado, basicamente, por três parcelas: oxidante, combustível e elementos de ligação. Segundo Sutton (2001) usualmente se utilizam perclorato de amônia (NH_4ClO_4) dadas suas características de boa compatibilidade com variados combustíveis, disponibilidade e bom despenho quanto ao processo de combustão. Também se utiliza, em aplicações de menores requisitos de empuxo, alguns tipos de nitratos, tal como nitrato de amônia cujo baixo custo e não produção de fumaça pode ser de interesse.

O combustível mais utilizado, ainda segundo Sutton (2001), alumínio em pó esferoidizado. Boro e berílio surgem como alternativas, sendo o primeiro de baixa eficiência, a não ser quando em grãos bastante diminutos e na presença de ar; o segundo já possui queima bastante mais fácil do que o boro, por apresentar ponto de fusão mais baixo, produzindo impulso específico maior, entretanto enfrenta problemas no que diz respeito sua alta toxicidade.

Aglomerantes são substâncias que visam unir as parcelas sólidas de oxidantes e combustíveis num único sólido. Em geral são poliésteres, poliéster e poli-butadienos. Implicam em alterações na eficiência de queima dos combustíveis dadas reações que se processam nestes polímeros em contato com o oxidante e

combustível, bem como em sua degradação, devendo ser bem selecionado para comprometer o mínimo possível, o desempenho do sistema de propulsão.

Em geral, os grão possuem uma cavidade interna pela qual a combustão é deflagrada a partir do uso de algum ignitor. Esta cavidade aumenta numa direção radial conforme se processa a combustão, aumentando o volume da câmara de combustão ocupado pelos gases, modificando a curva de pressão em função do tempo. Há uma quantidade bastante grande de formas desta cavidade interna de acordo com o perfil de empuxo desejado a ser fornecido pelo sistema de propulsão, entretanto, conforme Sutton (2001), a construção se baseia em algumas poucas formas já bastante conhecidas. A seção 4.1.2 o presente texto visa abordar o efeito da forma do grão nas características de queima do mesmo. Ainda segundo Sutton (2001), há grão propelentes que queimam tal como cigarros, isto é, não possuem cavidade interna e são consumidos longitudinalmente, embora o usual não o seja utilizar. Também é possível colocar mais de um grão-propelente dentro de uma câmara de combustão, sendo esta configuração definida *restart grains*.

Conforme supracitado, o processo de combustão inicia-se pela ação do ignitor. Conforme o ar é aquecido e o combustível consumido, o gás no interior da câmara a alta pressão e com grande temperatura, passa a promover a continuidade da queima do combustível, sendo estas duas propriedades bastante importantes no controle deste processo. Para acelerar ou aumentar a eficiência do processo de combustão algumas alternativas são utilizadas, tal como a utilização de estereatos de chumbo e cobre (Sutton, 2001).

Cinzas não são um grande problema no que tange a combustão de combustíveis sólidos no atual estado de desenvolvimento dos mesmos. Segundo Sutton (2001) apenas 1% dos produtos da combustão são cinzas, contra 7% na década de 1970.

4.1.2. Formatos de grão

Conforme será apresentado na seção 4.1.3, a combustão do propelente sólido é dependente da área de queima do grão. Desta forma, a forma do grão é de fundamental importância para a determinação do projeto do sistema de combustão adequado às necessidades.

Segundo Ordnance Corps (1960), pode-se definir os grãos como de queima neutra (quando a geometria é tal que permita queima em taxa constante a cada instante de tempo), de queima progressiva (aqueles em que a taxa de combustão aumenta de acordo com o tempo) e regressiva (taxa de combustão é reduzida conforme o tempo). Tais propriedades de queima são usualmente obtidas com a alteração da forma da cavidade interna do grão propelente.

Há, segundo Sutton (2001) uma grande quantidade de formas de grão existente, muito embora o esforço de projeto em geral seja restrito há algumas formas bastante estudadas e conhecidas. Dentre elas citam-se o grão estrelado e o cilíndrico. A figura 4.4 ilustra algumas formas de grão bem como as respectivas curvas de empuxo em função do tempo de queima.

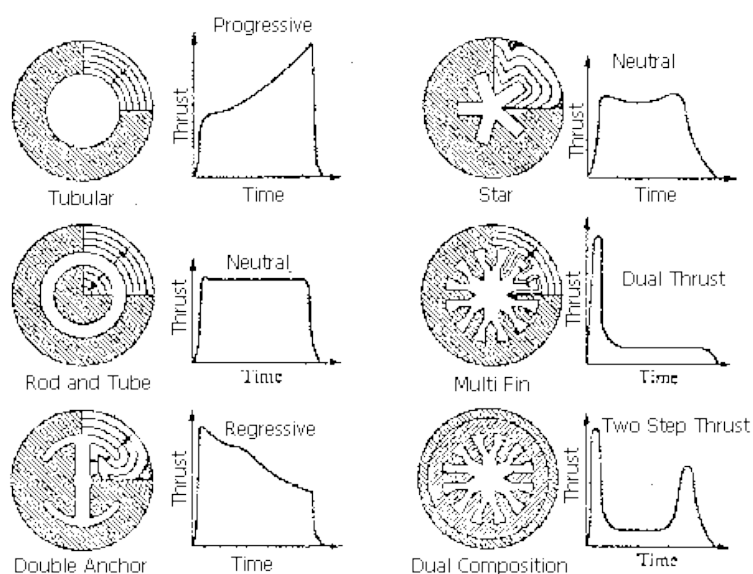


Figura 4.4 – Variadas geometrias de grão-propelente e respectivas curvas de empuxo em função do tempo (Nakka Rocketry, 2013)

Para que haja alteração do perfil de empuxo conforme o tempo, é necessário que se altere a taxa de queima do propelente, o que é possível com a alteração da área de combustão do propelente. Tal será discutido na seção que se segue.

4.1.3. Taxa de queima

A taxa de queima de um propelente sólido diz respeito a perda de espessura do grão por unidade de tempo durante sua queima. Conforme já exposto, o grão de propelente sólido é consumido do centro (onde possui, a priori, uma cavidade) para sua porção externa, sendo este consumo dependente, em maior grau, a pressão interna da câmara de combustão (Sutton, 2001), e é exatamente esta taxa de “degradação” do grão-propelente que esta variável mede.

Conforme afirmam Sutton (2001) e Ordnance Corps (1960), o processo de combustão de propelente sólido não é completamente explicada a partir de modelos algébricos, sendo necessário recorrer a dados experimentais para maior relevância no projeto ou seleção do combustível para o sistema de propulsão proposto. Uma relação empírica que descreve de maneira adequada a taxa de queima de um combustível sólido a uma dada temperatura T_p do grão imediatamente anterior a queima (Ordnance Corps, 1960) é dada pela relação 4.1.

$$r = ap_c^n \quad (4.1)$$

Com r a taxa de queima; p_c a pressão no interior da câmara de combustão; a o coeficiente de temperatura, relacionado a temperatura ambiente do grão-propelente; n o índice de combustão que caracteriza a influência da pressão da câmara de combustão na taxa de regressão do combustível sólido. A figura 4.5, extraída de Sutton (19xx) ilustra a variação da taxa de combustão em função da pressão da câmara de combustão.

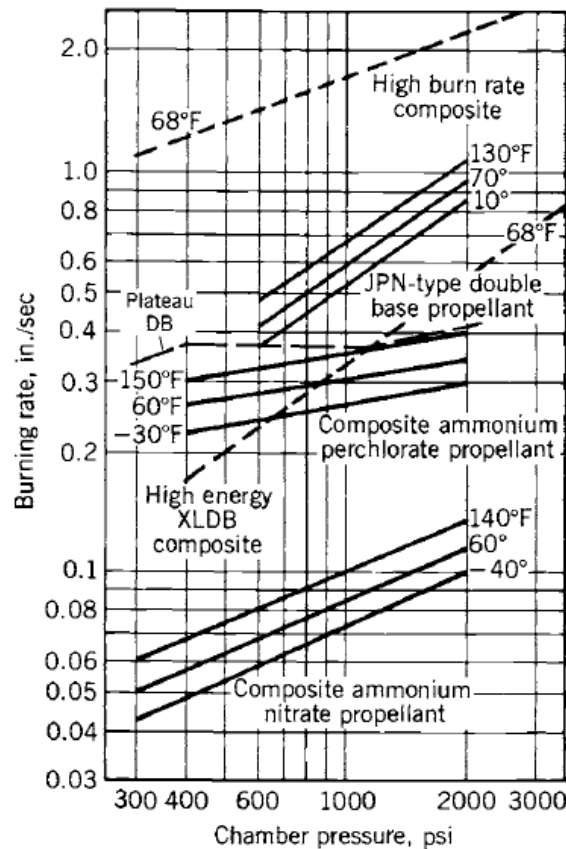


Figura 4.5 – Taxa de queima em função da pressão no interior da câmara de combustão
(extraído de Sutton, 2001, p. 429)

O que se nota são maiores taxas de queima do propelente quanto maior sua temperatura anterior a queima para cada um daqueles ilustrados no gráfico. Este comportamento é explicado pela alteração da cinética química da reação de combustão acarretada pelo aumento de temperatura. Há formulação matemática que visa quantificar tal efeito na taxa de combustão sendo estas dada pela equação 4.2, conforme exposto em Sutton (2001).

$$\sigma_p = \left(\frac{\delta \ln r}{\delta T} \right)_p = \frac{1}{r} \left(\frac{\delta r}{\delta T} \right)_p \quad (4.2)$$

O termo σ_p fornece a sensibilidade da taxa de queima em função da temperatura, a uma dada pressão interna da câmara de combustão.

A expressão empírica para taxa de queima permite determinar a taxa de geração de gases de combustão, possibilitando deste modo, a partir do equacionamento do balanço de massa no sistema de propulsão - composto por câmara de combustão e bocal – e assim uma avaliação da pressão da câmara de combustão conforme se dá a evolução do processo de combustão com o tempo, bem como estipular uma curva de empuxo em função do tempo, dada sua íntima relação com a pressão e velocidade dos gases que saem acelerados do bocal, em geral, convergente-divergente operando como um bocal de De Laval. Tal será feito na seção 5, quando se equacionará tais expressões e, para determinados conjuntos de parâmetros, estimar o comportamento do empuxo e pressão na câmara de combustão conforme há a evolução da queima do propelente. A vazão mássica gerada na queima do grão-propelente é dada pela equação 4.3.

$$\dot{m}_{gerado} = \dot{m}_{comb} = \rho_g r A_q = \rho_g (a p_c^n) A_q \quad (4.3)$$

Da expressão 4.3 tem-se ρ_{gc} a massa específica dos gases oriundos do processo de combustão e A_q a área do propelente sendo queimada. É notório que esta varia conforme o tempo dado o consumo de propelente, desta forma a vazão mássica também varia com tal.

4.1.4. Combustão de combustíveis sólidos

4.1.4.1. Ignição

A ignição de combustíveis sólidos, segundo Kuo (1984) possui três mecanismos distintos propostos para sua avaliação, sendo eles:

- Teoria da ignição térmica: reações químicas exotérmicas que se processam na superfície do grão-propelente acarreta em aumento de temperatura tal que se atinge a temperatura de ignição;
- Teoria da fase gasosa: transferência de calor a superfície do grão devido a reações exotérmicas da fase gasosa da câmara de combustão acarretam em aumento de temperatura da superfície do grão até aquela na qual se processa a ignição;
- Teoria heterogênea: diz respeito, conforme será apresentado na seção 4.1.4.3, as reações exotérmicas entre os gases oriundos do processo de pirólise do aglomerante e decomposição do oxidante. Tais culminam em gradiente térmico entre a superfície do grão e estes gases acarretando num processo de transferência de calor que tende a aquecer o grão até a temperatura de ignição.

Kuo (1984) ainda destaca que, parte fundamental do processo de combustão está na ignição do combustível sólido sendo esta responsável por se obter a pressão de trabalho para a queima do combustível. Conforme ilustrado pela figura 4.6, nota-se três fases bastante distintas: a primeira se estende desde o início da ignição até a uma primeira indicação da ignição do grão; a segunda se estende até a ignição completa de toda a superfície livre do grão propelente, dando início a terceira fase na qual a pressão no interior da câmara de combustão atinge a pressão de projeto.

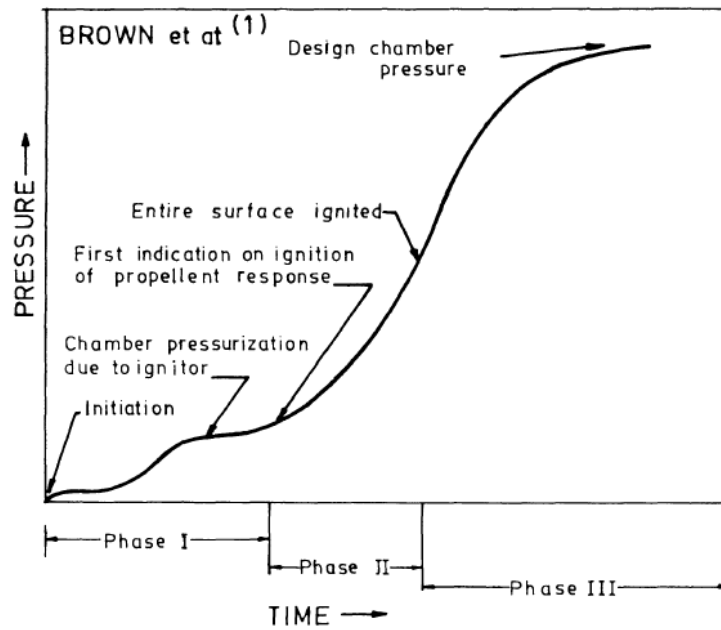


Figura 4.6 – Fases do processo de ignição de combustíveis sólidos (Kuo, 1984)

Na primeira fase nota-se a existência de um retardamento químico no início da ignição até o começo da queima do grão propelente, tal como observado num motor automotivo de ciclo Otto. Tal retardamento tem origem do aquecimento da superfície do grão bem como da transferência de calor devido a uma reação exotérmica no que diz respeito a degradação do aglomerante. Este tempo pode ser estimada partir de:

$$t = \left\{ \frac{k \rho_{comb} \pi}{2F} \left[\frac{E/\bar{R}}{1 - 1.04 \ln \left(\frac{F}{B} \right)} - T_0 \right] \right\}^2$$

Com k a condutividade térmica do propelente, F a taxa de transferência de calor a partir do ignitor, B o fator pré-exponencial da equação de Arrhenius, E a energia de ativação para a reação de ignição, ρ_{comb} a massa específica do combustível, \bar{R} a constante dos gases perfeitos e T_0 a temperatura inicial do conjunto grão e espaço

vazio da câmara de combustão. Tal expressão leva em conta os da degradação do aglomerante e de reações exotérmicas do processo de ignição.

O efeito da pressão no retardamento da ignição é dado por relação empírica proposta por Baer e Fishman apresentada em Kuo (1984)

$$t = \left[\left(\frac{d}{\dot{Q}^2} \right)^3 + \left(\frac{b^3}{p^{6,15}} \right) \right]^{1/3}$$

Com \dot{Q} a taxa de transferência de calor para o grão, d e b são fatores experimentais e p, a pressão no interior da câmara de combustão. O que se nota é que a pressão possui influência inversamente proporcional, isto é, quanto maior for, menor o tempo de retardamento da ignição. Isto se deve ao fato de a pressão aumentar a taxa de reatividade química das substâncias nas reações que se processam durante a ignição, acelerando tal processo, conforme será apresentado na seção 4.1.4.4 a partir do trabalho de Maccio (1998).

4.1.4.2. O processo de combustão

Simplificadamente, segundo Kuo (1984), após a ignição o combustível e oxidante se degradam formando uma mistura na superfície do grão-propelente, para que tal ocorra é necessário que haja a cisão do aglomerante por meio de uma reação de degradação deste, em geral um polímero, formando monômeros e gases.

Para que a combustão se processe é necessário que haja mistura de oxidante e combustível tal como em qualquer processo de combustão. Entretanto como estes não estão na fase líquida ou gasosa, mas sim numa mistura entre fases sólidas ou sólida e gasosa (combustível e oxidante, respectivamente) a mistura não ocorre de maneira homogênea como ocorre num motor a combustão interna dado o swirl

conforme a mistura é injetada no cilindro, mas sim por meio de difusão do oxidante através do grão de combustível, acelerada por pressões de maior magnitude.

Conforme será apresentado em 4.1.4.4, a degradação do aglomerante e oxidante, outrora na fase sólida, acarretam na formação de substâncias que gasosas que, ao se combinarem por intermédio de reações química exotérmicas, formam uma chama. Dada a característica exotérmica do processo, calor é transferido para o grão-propelente que, dada a ignição, passa a se decompor alimentando tal chama.

4.1.4.3. Combustíveis sólidos homogêneos

Exemplos destes combustíveis são a nitroglicerina e a nitrocelulose, sendo estes caracterizados pelos componentes (oxidante e comburente) serem pré-misturados, diferentemente dos combustíveis sólidos compostos ou heterogêneos. Esta homogeneidade de mistura traz vantagens no que tange os aspectos construtivos tendo em vista que o sólido de combustível pode ser moldado no interior da câmara ou extrudados com certa facilidade, desta forma, pode-se ter grãos-propelentes de diversos formatos. Esta multiplicidade de formas construtivas representa uma vantagem quando se deseja taxas de queimas adequadas ou mesmo adequação do grão a geometria do artefato ao qual será instalado.

Uma vantagem deste combustível em relação ao composto, segundo Kuo (1984) é o fato de não formar fumaça dado que em sua combustão não há formação ácido clorídrico, substância que condensa de maneira relativamente fácil quando em contato com o vapor de água quente na região de escape (ou pluma) do sistema propulsor. Como desvantagem cita-se o fato de ter menor impulso específico em relação aos combustíveis heterogêneos, restringindo-o a aplicações de média e pequena potências, tais como mísseis pequenos ou de curto alcance.

Kuo (1984) traz algumas características do processo de combustão que se processa a partir da ignição destes combustíveis, sendo tal análise limitada ao processo se desenvolvendo em regime permanente, isto é, já se supões que o período transiente decorrente da ignição até estabilização da chama já tenha sido

completamente desenvolvido. A figura 4.7 traz uma ilustração particular acerca dos variados extratos do conjunto combustível, chama e gases durante o processo de combustão.

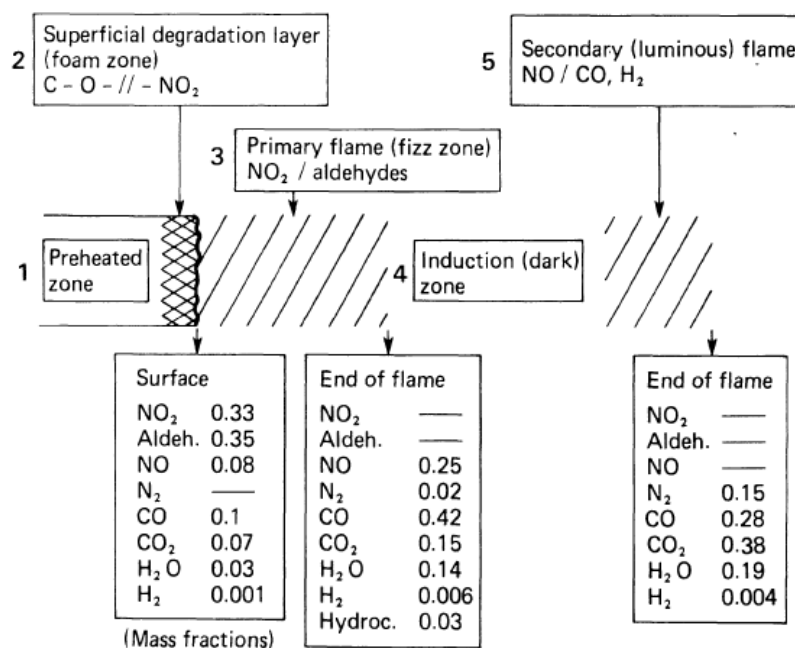


Figura 4.7 – Regiões típicas durante a queima de um propelente sólido homogêneo

Após ignição e estabelecimento de condição de equilíbrio do processo ao que se refere a constância do processo de queima do propelente, nota-se que há, na fronteira da face em degradação do combustível uma região pré-aquecida bastante diminuta na qual não há qualquer tipo de reação dada a temperatura não tão elevada a ponto de garantir energia de ativação necessária. Atravessando tal região, os componentes do grão-propelente chegam a região de degradação na qual as temperaturas são de tal magnitude que permitem a cisão de moléculas de certos componentes, como é o caso da ligação entre CO₂ e NO₂ que passa a ser desfeita. Esta degradação implica em produtos que passam a ser reagentes de outras reações, sendo o balanço global da energia destas reações de degradação e formação positivo, isto é, libera-se mais energia do que se consome, caracterizando um processo exotérmico, o que garante a alimentação energética necessária para que o processo da combustão e degradação do grão-propelente continue ocorrendo.

Em pressões adequadas (~10 MPa segundo Kuo, 1984) nota-se a formação de duas frentes de chama distintas separadas por uma zona negra, tal como ilustrado pela figura 4.7. A chama secundária, em geral, está demasiadamente longe da primária - esta última próxima a face de degradação do grão –propelente – não influenciando de maneira significativa no processo de queima do propelente, ou seja, este processo é diretamente controlado pela chama primária, quando há, são efeito este decorrente das simultâneas reações químicas de degradação e formação se processando a partir dos produtos da combustão.

No que tange os aspectos de modelagem matemática dos processos matemáticos é necessário avaliar a transferência de calor ao propelente bem como as taxas nas quais as reações se processam, tendo em vista a grande correlação que há entre tais fenômenos, isto é, quanto maior a reatividade, mais intensa a reação química e, conseqüentemente, maior a quantidade de calor gerado no processo a ser transferido tanto para os gases queimados fronteiros, estrutura e grão-propelente. Kuo (1984) apresenta uma abordagem bastante detalhada acerca dos processos de queima para as fases gasosas e não-gasosas de maneira separada. Aqui a análise será restrita somente aos processos necessários para obtenção das temperaturas nas frentes de chama previamente mencionadas, temperatura da superfície do grão e a taxa de transferência de calor na sua superfície de degradação. É digno de nota que com estes parâmetros e sabendo como varia o diâmetro do grão bem como sua condutividade, pode-se estimar com alguma a taxa de transferência de calor para a carcaça da câmara de combustão durante o processo completo de queima a partir da aplicação do balanço de energia um volume de controle de fronteira móvel.

A taxa de queima do propelente está relacionada a temperatura da superfície do grão segundo uma relação próxima a aquela da equação de Arrhenius (a ser apresentada na seção 4.1.4.4), dada por:

$$R = e^{-\frac{E_a}{2RT_{superficie}}}$$

Na qual E_a é a energia de ativação para a degradação do grão propelente, \bar{R} a constante dos gases ideais e $T_{superfície}$ a temperatura da superfície do grão expostas aos produtos da combustão.

A taxa de transferência de calor a superfície do grão está intimamente relacionada aos gases formados durante a combustão. Aplicando o balanço de energia à superfície do propelente em queima:

$$\dot{q}_{superfície} = k_{gases} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{gases,sup} = \rho_{propelente} R (c_{gas} T_{sup} - c_{prop} T_0 - q_{sup,degrad})$$

Na qual k é a condutividade térmica dos gases, c o capacidade térmica específica dos gases (gás) e propelente (prop), $q_{sup,degrad}$ o calor por unidade de massa demandado para a degradação do grão-propelente, $\rho_{propelente}$ a massa específica do propelente e R a taxa de reação já definida e T_0 a temperatura inicial do propelente.

Tal taxa de transferência de calor, como já supracitado, é decorrente da frente de chama primária formação nas vizinhanças da superfície em degradação, desta forma sendo dependente, portanto, da cinética da reação de formação desta. Em termos de balanço de energia entre o grão-propelente a sua temperatura inicial e o limite mais distante da chama primária tem-se a temperatura desta.

$$T_{chama prim.} = \frac{c_{prop} T_0 + q_{sup,degrad} + q_{chama prim}}{c_{gas}}$$

Com $q_{chama prim}$ o calor consumido para a formação da chama primária.

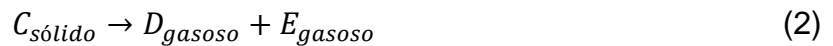
4.1.4.4. Combustíveis sólidos compostos

Kuo (1984) classifica combustíveis sólidos compostos como aqueles que possuem oxidante finamente particulado disperso no grão propelente. Devido a esta característica construtiva, um número grande de reações químicas ocorrem durante a combustão deste tipo de combustível, dificultando uma análise numérica do problema.

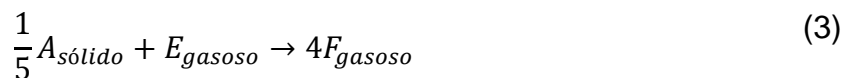
Miccio (1998) propõe a divisão da combustão em cinco reações químicas distintas a serem consideradas na modelagem do problema a fim de se obter estimativas da temperatura da superfície em queima do grão-propelente bem como da taxa de queima a partir da avaliação das reações do aglomerante e oxidante. Genericamente, seguindo a nomenclatura de Miccio (1998), estas cinco equações são dadas pela pirólise, isto é decomposição a alta temperatura, do aglomerante:



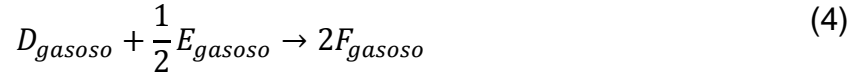
Seguida pela dissociação do oxidante:



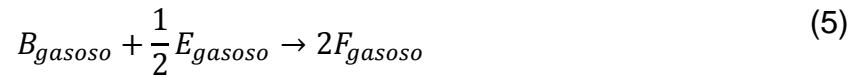
A equação que segue diz respeito a a oxidação heterogênea do aglomerante (espécie A) por uma substância na fase gasosa (E), oriunda do processo de dissociação do oxidante (C):



A formação da chama de oxidação devido os produtos da dissociação do oxidante, a temperatura elevadas é dada por:



Nota-se que o mesmo produto da oxidação do aglomerante é formado nesta reação e também na reação de formação da chama a partir dos produtos da dissociação do aglomerante e do oxidante



O modelo proposto baseia-se na hipótese das espécies gasosas serem supostas como gás perfeito e em escoamento unidimensional ao longo da direção axial do propelente ou câmara de combustão, tal como será suposto para a modelagem preliminar do escoamento induzido pela queima do grão propelente *a posteriori*.

Aplicando o balanço de massa ao aglomerante e oxidante, respectivamente, levando em conta as reações das quais participam:

$$\frac{dm_{aglomerante}}{dt} = -M_A \int_{A_{aglomerante}} \left(R_1 + \frac{R_3}{5} \right) dA$$

$$\frac{dm_{oxidante}}{dt} = -M_C \int_{A_{oxidante}} (R_2) dA$$

Com R_i a taxa de reação da espécie na i -ésima equação, em $kg\ mol/(m^2s)$, e M_i a massa molecular de cada espécie (em $kg/kmol$). Ou seja, a variação da quantidade total de tais espécies é proporcional a taxa com que são consumidas nas reações de pirólise do aglomerante e dissociação do oxidante.

Prosseguindo com a aplicação da equação da continuidade ao volume de controle (V.C.) definido pelo volume total do sólido do grão-propelente (por exemplo a câmara de combustão de um foguete), como somente gás deixando o V.C.:

$$\frac{d\rho_{gases}}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

E sabendo que, da equação dos gases perfeitos:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{RT}$$

E então, em termos de concentração:

$$C = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV} = \frac{p}{\bar{R}T} = \frac{\rho}{M} \Rightarrow \rho = CM$$

Então, na equação da continuidade para o escoamento na direção axial (z):

$$\frac{d(M_{gases}C_{gases})}{dt} + \frac{\partial(C_{gases}M_{gases}u_z)}{\partial x} = 0$$

O que demonstra a variação da massa de gases oriunda da combustão, no caso, da espécie F.

Supondo o mesmo volume de controle já explicitado tem-se do balanço de massa para cada uma das espécies gasosas envolvidas no processo, em termos da concentração molar $y_i = n_i/n$, com n o número de mols:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -u_z \frac{\partial y_i}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial y_i}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial y_i}{\partial y} \right)}_{\text{Lei de Fick}} + G_i$$

Com G_i a taxa de geração da i -ésima, sendo esta dependente da reação química correspondente. Para a espécie B ela é dada por $-R_5$ (taxa molar de consumo da espécie B na reação de combustão com a espécie E oriunda do oxidante), para a D por $-R_4$ e para a E, $-0,5(R_4 + R_5)$.

Do balanço de energia no V.C. considerado para a fase condensada, tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_{\text{sólido}} \gamma_{\text{sólido}}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Com T a temperatura e γ o calor específico molar. Analogamente para a fase gasosa:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_{\text{gasoso}} \gamma_{\text{gasoso}}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) - u_z \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{C_{\text{gasoso}} \gamma_{\text{gasoso}}} (R_4 H_4 + R_5 H_5)$$

Com k a condutividade térmica e H a entalpia molar das reações listadas. Ou seja, a variação de temperatura é função da condução de temperatura em cada uma das fases, descontadas as variações oriundas do escoamento da fase gasosa e da energia requerida para realização dos processos químicos.

A taxa de reação de cada uma das espécies é dada pela equação de Arrhenius corrigida pela concentração dos produtos da pirólise e dissociação bem como pela pressão associada ao processo. De Atkins (2008), tem-se:

$$R = Ae^{-\frac{E_a}{\bar{R}T}}$$

Com R a taxa de reação, A o fator pré-exponencial, E_a a energia de ativação para determinado processo químico, \bar{R} a constante dos gases ideais e T a temperatura na qual a reação está se processando. Com as correções propostas por Miccio (1998):

$$R_j = A_j e^{-\frac{E_{a,j}}{\bar{R}T}} p^{v_j} y_B^{\mu_{j,B}} y_D^{\mu_{j,D}} y_E^{\mu_{j,E}}$$

Com p a pressão na qual a reação está se processando, v_j o expoente de pressão para a j -ésima reação, $\mu_{j,i}$ o expoente de fração molar da espécie i na j -ésima reação.

Destas equações, pode-se estimar o comportamento das espécies bem como da temperatura durante a queima do combustível sólido. Nota-se que, conforme já comentado, o tratamento matemático para o caso de combustíveis sólidos compostos é bastante mais complicado do que para os homogêneos. Isto se deve as múltiplas reações que ocorrem simultaneamente e que necessitam de tratamento mais delicado no que tange sua simulação.

A figura 4.8 apresenta o resultado das simulações realizadas por Miccio(1998) remetendo a variação da temperatura da superfície do combustível sólido em função da pressão na qual as reações estão se processando. Tal levantamento é feito para duas geometrias distintas: SAND e SPHE. A primeira diz respeito a uma geometria do tipo “sanduíche” no que se refere ao oxidante estar disposto entre camadas de combustível, já a segunda se remete a propelente com partículas esféricas de oxidante.

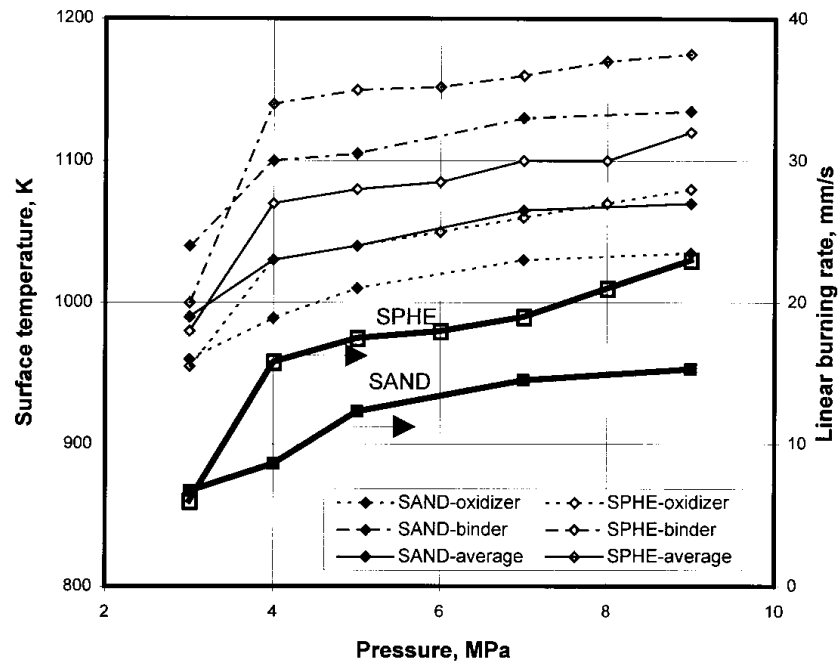


Figura 4.8 – Variação da temperatura na superfície do grão-propelente em função da pressão de reação

Da análise do resultado o que se nota é uma aumento da temperatura da superfície com a pressão, sendo este maior para a geometria SPHE do que para a SAND isto em muito pela maior homogeneidade na primeira configuração, o que aumenta a área de contato entre o combustível e o oxidante, tornando mais eficiente os processos de transferência de calor. Também se nota que a temperatura do aglomerante tende a ser maior do que aquela do oxidante isto porque sua dissociação envolve uma pirólise caracterizada pela ocorrência em altas temperaturas.

4.2. ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL

4.2.1. Fundamentos

Shapiro (1953) separa a análise do escoamento em múltiplas dimensões em dois casos básicos: escoamento ir rotacional, sem transferência de calor ou atrito, ou seja, potencial e aquele com transferência de calor e atrito. O primeiro caso,

amplamente discutido é basicamente utilizado para a determinação do escoamento dentro de um bocal ao longe da parede ou o escoamento externo ao longe no qual há algum corpo imerso. Tal é a mesma analogia feita pela mecânica dos fluidos incompressíveis ao analisar o escoamento ao redor de corpos imersos tais como fólios, conforme apresentado em Anderson (1988) e Munson (2004). Tal simplificação é de sobremodo importante para avaliação de muitos através de técnicas comuns ao escoamento supersônico e subsônico (método das variações infinitesimais), ou distintas (transformação para o plano hodográfico em escoamentos subsônicos e método das características para supersônicos). O segundo caso, por sua vez, é restrito a análise da camada limite, supondo que todos os efeitos devido ao atrito e transferência de calor ocorram através delas, sendo elas aderidas a fronteira do corpo ou obstáculo ao escoamento.

Como um primeiro passo, restringir-se-á a análise do escoamento potencial no interior de um bocal convergente-divergente, desta forma serão lançadas descrições acerca de cada um dos métodos a serem utilizados para o projeto de um dos bocais. Entretanto, conforme atestado em Anderson (2003) e Shapiro (1953), os métodos, embora distintos partem todos das equações básicas para o escoamento potencial, desta forma a apresentação destes conceitos básicos deve ser evidenciada de forma a motivar os desenvolvimentos posteriores.

Conforme definido em Anderson (1988 e 2003) e Shapiro (1953), a equação da continuidade para regime permanente na forma diferencial é dada pela equação 4.1:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.1)$$

Com \vec{u} o vetor velocidade de um ponto do escoamento. Da teoria potencial tem-se, por definição que:

$$\vec{u} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (4.2)$$

Com ϕ uma função escalar que satisfaça:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Para o caso plano, objeto de análise do presente trabalho, o vetor velocidade é definido por:

$$\vec{u} = (u, v) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (\phi_x, \phi_y) \quad (4.3)$$

Expandindo o divergente da equação (4.1) e substituindo o resultado obtido para o caso plano em (4.3):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\phi_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\phi_y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \boxed{\rho\phi_{xx} + \rho\phi_{yy} + \phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Da definição de número de Mach, já suposto o processo isentrópico por hipótese do escoamento potencial:

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (4.5)$$

Logo, a fim de obter as derivadas parciais da massa específica do fluido em relação a posição ao longo do escoamento é necessário obter alguma expressão para ∂p em função do campo de velocidades. A ideia mais natural será a de se valer da equação de Euler na forma diferencial (Shapiro, 1953):

$$\frac{1}{\rho} dp = -d\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2}\right) \quad (4.6)$$

Que substituída com os potenciais de velocidade se torna:

$$dp = -\rho d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{2}\right) \quad (4.7)$$

Igualando (4.5) com (4.7):

$$\frac{\partial \rho}{c^2} = -\rho d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2}{2}\right) \quad (4.8)$$

Derivando (4.8) em relação a x e a y:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{2c^2} (2\phi_x \phi_{xx} + 2\phi_y \phi_{xy})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{2c^2} (2\phi_x \phi_{xy} + 2\phi_y \phi_{yy})$$

Consequentemente, da equação (4.4):

$$\begin{aligned} \rho \phi_{xx} + \rho \phi_{yy} - \frac{\rho \phi_x^2 \phi_{xx}}{c^2} - \frac{\rho \phi_x \phi_y \phi_{xy}}{c^2} - \frac{\rho \phi_y^2 \phi_{yy}}{c^2} - \frac{\rho \phi_x \phi_y \phi_{xy}}{c^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) \phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) \phi_{yy} - 2 \frac{\phi_x \phi_y \phi_{xy}}{c^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Em termos das componentes de velocidade:

$$\left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{uv}{c^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \right] \Rightarrow \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \left[(c^2 - u^2)u_x + (c^2 - v^2)u_y - uv(u_x - u_y) = 0 \right] \quad (4.11)$$

4.2.2. Métodos das características

O método das características, segundo Anderson (2003) consiste em determinar linhas características no escoamento para as quais a variação das propriedades ao longo das direções do sistema de coordenadas é indeterminada, tal como em linhas de Mach de propagação de choque infinitesimais ao longo do escoamento. A partir da determinação destas, por meio das equações fundamentais já desenvolvidas para o escoamento compressíveis e das condições de compatibilidade, tem-se a determinação de cada ponto de intersecção entre as características. Desta forma há a possibilidade de se saber as propriedades ao longo de cada ponto do sistema definido dada uma malha gerada. Ou seja, é possível se determinar tantos nós quanto desejados dada uma malha para o escoamento.

Três diferentes abordagens para a determinação do equacionamento fundamental são apresentadas na bibliografia. Hodge (1995) parte de conceitos mais fundamentais acerca do escoamento potencial, avaliando um elemento infinitesimal exclusivamente para a determinação das expressões básicas para avaliação do método característico. Shapiro (1953) dá continuidade à sua abordagem para escoamentos potenciais supersônicos, demonstrando muito além do equacionamento fundamental, inúmeros casos fundamentais tais como influência de paredes curvas no escoamento e projeto de bocais de túneis de vento. Por fim, Anderson tem uma abordagem pouco mais direta em relação ao seus pares, avaliando o método das características inicialmente de uma maneira aproximada ao

método computacional, passando por uma definição pouco mais formal das linhas características até determinar, finalmente, as equações de compatibilidade.

Tanto Hodge (1995) quanto Anderson (2003) fazem alusão a dois casos notáveis a serem discutidos posteriormente: pontos internos a malha e pontos de parede. O primeiro faz uma abordagem bem mais detalhada, lançando mão das equações que regem a posição de cada um dos pontos enquanto Anderson somente faz aplicação de conceitos fundamentais. Os conceitos a serem apresentados a partir de agora serão um compilado daqueles encontrados em Anderson (2003) e Hodge (1995) aproveitando o melhor possível os conceitos por eles apresentados a fim de, por meio de uma rápida revisão, apresentar consistentemente o método em questão.

A figura (4.9) extraída de Anderson (2003) traz os nós de uma malha fluida discretizada com o vetor velocidade plano para um ponto qualquer do escoamento. É importante ressaltar que todos os pontos estão sobre uma linha característica do escoamento e que o vetor velocidade faz um ângulo μ em relação a este ente. Tal situação ilustrará de maneira bastante interessante o fato das linhas de Mach serem linhas características do escoamento, resultando importante para o projeto dos bocais bidimensionais.

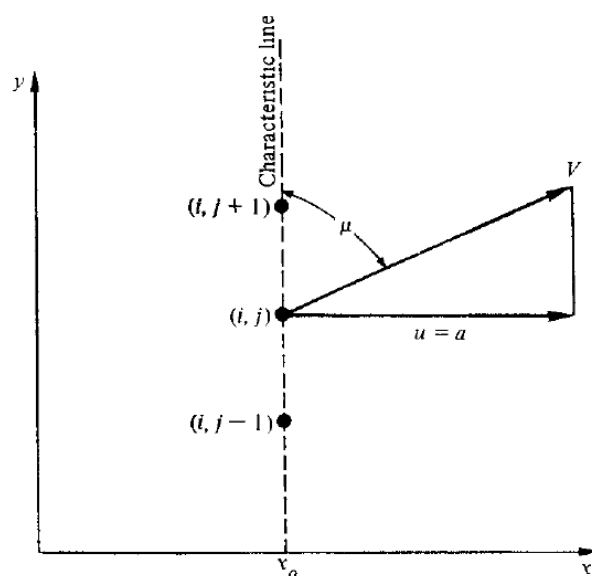


Figura 4.9 – Malha fluida com linha característica (Anderson, 2003)

Sabe-se que o ponto posterior na direção x na malha fluida pode ser determinado a partir da expansão em série de Taylor da projeção da velocidade naquela direção, dado por:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \sum \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)_{i,j} \Delta x^k \quad (4.12)$$

Da equação da continuidade na forma apresentada por (4.10) é possível se isolar o termo $\partial u / \partial x$, resultando em:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2 \frac{uv}{c^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)} \quad (4.13)$$

Com (4.13) o próximo ponto da malha pode ser determinado para o caso de uma aproximação linear. Desta expressão também é possível perceber que se a componente da velocidade na direção x do escoamento for a sônica local, o termo de variação desta componente em função da posição ao longo do eixo x é uma indeterminação. Nota-se que para cada ponto de uma curva que varia de tal maneira não se sabe a variação já explicitada, mas sim as propriedades a cada ponto. Para este curva se dá o nome de linha característica de um escoamento, tal como definido em Anderson (2003).

Da figura 4.9 pode-se notar que, de trigonometria básica no triângulo de velocidades, para o caso notável em que $u = c$:

$$\text{sen}(\mu) = \frac{u}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \mu = \arcsen\left(\frac{c}{\|\vec{u}\|}\right) \Rightarrow \boxed{\mu = \arcsen\left(\frac{1}{M}\right)} \quad (4.14)$$

Que é a própria definição de ângulo de Mach conforme apresentado em Zucker (1977). Desta forma pode-se afirmar que as linhas de Mach são linhas características. A pergunta que resta é se somente estas linhas são características ou se há outras. Ainda baseado em Anderson (2003), lança-se mão da equação da continuidade sob a forma de potenciais de velocidade:

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right)\phi_{yy} - 2\frac{\phi_x\phi_y\phi_{xy}}{c^2} = 0 \quad (4.9)$$

Diferenciando ϕ_x e ϕ_y :

$$d\phi_x = \frac{\partial\phi_x}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi_x}{\partial y}dy \Rightarrow d\phi_x = \phi_{xx}dx + \phi_{xy}dy \quad (4.15)$$

$$d\phi_y = \frac{\partial\phi_y}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi_y}{\partial y}dy \Rightarrow d\phi_y = \underbrace{\phi_{yx}}_{=\phi_{xy}} dx + \phi_{yy}dy \quad (4.16)$$

(Schwartz)

Tem-se um sistema linear com três equações e três incógnitas ($\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$) dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\phi_x^2}{c^2} & 1 - \frac{\phi_y^2}{c^2} & -2\frac{\phi_x\phi_y}{c^2} \\ dx & 0 & dy \\ 0 & dy & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{xx} \\ \phi_{yy} \\ \phi_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d\phi_x \\ d\phi_y \end{pmatrix}$$

A solução deste sistema linear fornece as seguintes soluções:

$$\phi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dx d\phi_x + 2 \frac{\phi_x \phi_y}{c^2} dx d\phi_x - \left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dy d\phi_y}{\left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dx^2 + 2 \frac{\phi_x \phi_y}{c^2} dx dy + \left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dy^2}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dx d\phi_x + 2 \frac{\phi_x \phi_y}{c^2} dx d\phi_y + \left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dy d\phi_y}{\left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dx^2 + 2 \frac{\phi_x \phi_y}{c^2} dx dy + \left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dy^2}$$

$$\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dy d\phi_x + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dx d\phi_y}{\left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dx^2 + 2 \frac{\phi_x \phi_y}{c^2} dx dy + \left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dy^2}$$

Ou seja, conforme notado por Anderson (2003) as soluções são da forma:

$$\phi_{ij} = \frac{N}{D}$$

A figura 4.10, extraída de Anderson (2003) traz um ponto fluido A escoando ao longo de determinada direção e sentido definido pelo ângulo θ do vetor velocidade em relação ao eixo das abscissas. Esta direção é qualquer e define determinadamente as características do escoamento neste ponto. Isto pode ser dito porque para algum ângulo θ há alguma combinação de dx e dy tal que levem o denominador das soluções assumirem o valor nulo implicando no fato de, embora se saiba que cada uma das variações dos potenciais de velocidade neste ponto sejam conhecidas, sua variação em determinada direção passa a não ser.

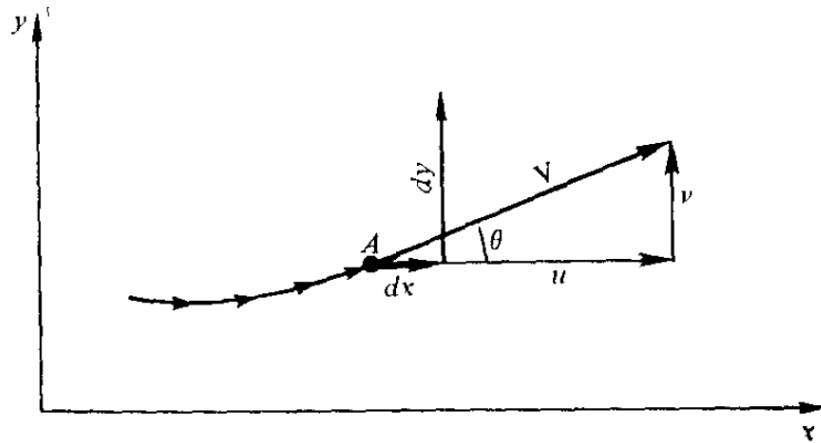


Figura 4.10 – Ponto A de um escoamento se movendo instantaneamente na direção θ em relação a horizontal (Anderson, 2003)

Assumir uma direção na qual se faça o denominador dos valores de ϕ_{ij} tender a zero é fisicamente inconsistente, tendo em vista que nunca haverá uma variação local de velocidades que tenda ao infinito para qualquer condição no escoamento de um fluido. A única saída para contornar esta problemática é assumir o valor do numerador da solução também nulo, acarretando numa indeterminação do tipo 0/0 para a variação das componentes da velocidade do ponto. Isto implica nestas variações de velocidades indeterminadas. Ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{0}{0} \quad (4.17)$$

Tal fato alude àquele já mencionado para as linhas características, entes nos quais não se tem a determinação da variação das propriedades ao longo das direções do escoamento. Tomando o denominador das soluções de ϕ_{ij} :

$$\left(1 - \frac{\phi_y^2}{c^2}\right) dx^2 + 2 \frac{\phi_x \phi_y}{c^2} dx dy + \left(1 - \frac{\phi_x^2}{c^2}\right) dy^2 = 0 \Rightarrow \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dx^2 + 2 \frac{uv}{c^2} dx dy + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dy^2 = 0 \quad (4.19)$$

Dividindo ambos lados de (4.19) por dx^2 :

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2 \frac{uv}{c^2} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad (4.20)$$

Conforme já explanado, forçando a solução ser da forma 0/0 introduz-se o conceito de linhas características. No caso particular em questão, sua direção local no ponto A é definida por:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car}$$

Substituindo esta expressão na equação (4.20) obtém-se, finalmente a expressão:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2 \frac{uv}{c^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car}^2 = 0 \quad (4.21)$$

Salta aos olhos que a equação (4.21) é uma função quadrática em dx/dy , desta forma sua solução é demasiadamente simples e dada por (4.22):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} &= \frac{-\frac{2uv}{c^2} \pm \sqrt{\frac{4u^2v^2}{c^4} - 4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}}{2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} &= \frac{-\frac{uv}{c^2} \pm \sqrt{\frac{u^2v^2}{c^4} - 1 - \frac{v^2u^2}{c^4} + \frac{u^2 + v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} = \frac{-\frac{uv}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\|\vec{u}\|^2}{c^2} - 1}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} = \frac{-\frac{uv}{c^2} \pm \sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$$
(4.22)

Nota-se que a solução pode ser real e dupla, simples ou complexa dependendo do regime de escoamento que se está avaliando. Para o caso de regime supersônico, há duas possíveis direções para as linhas características, conforme pode ser notado na figura 4.11 extraída de Anderson (2003). Para o caso do escoamento sônico, apenas uma direção característica existe. Em contrapartida para o escoamento subsônico somente soluções no domínio complexo são obtidas, daí o fato de não ser comum utilizar este método para a solução de problemas de escoamentos subsônicos.

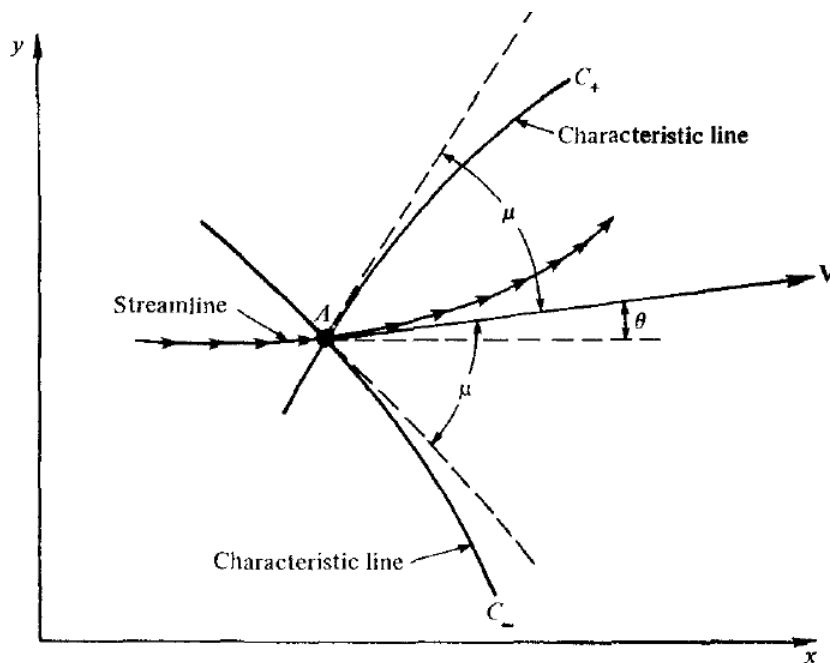


Figura 4.11 – Linhas características para o escoamento supersônico (Anderson, 2003)

Um último par de substituições pode ser feita na equação (4.22). Estas estão relacionadas a definição de cada uma das componentes do vetor velocidade a partir do módulo da velocidade. Sejam elas:

$$u = \|\vec{u}\| \cos \theta \quad (4.23)$$

$$v = \|\vec{u}\| \sin \theta \quad (4.24)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} &= \frac{-\frac{\|\vec{u}\|^2 \sin \theta \cos \theta}{c^2} \pm \sqrt{M^2 - 1}}{\left(1 - \frac{\|\vec{u}\|^2 \cos^2 \theta}{c^2}\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} &= \frac{-M^2 \sin \theta \cos \theta \pm \sqrt{M^2 - 1}}{(1 - M^2 \cos^2 \theta)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mas, da definição de ângulo de Mach:

$$\sin \mu = \frac{1}{M} \Rightarrow M^2 = \frac{1}{\sin^2 \mu} \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} = \frac{-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \mu}{\sin^2 \mu}}}{\left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}\right)} \quad (4.27)$$

O que resulta, segundo Anderson (2003), em:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{car} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (4.28)$$

Isto comprova o exposto anteriormente de que linhas de Mach são, de fato, linhas características do escoamento. Fato este a ser utilizado no projeto do bocal divergente a partir de suas linhas de Mach supostas oriundas do contorno da seção de área mínima, a garganta.

Do exposto, é possível delimitar as equações de compatibilidade para o método das características, permitindo assim sua aplicação na determinação da superfície da porção divergente do bocal convergente-divergente do míssil. Partindo do numerador da expressão desenvolvida para ϕ_{xy} com as velocidades explicitadas:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dy du + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dx dv &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dv}{du} &= -\frac{dy \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{dx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Substituindo a expressão encontrada para dx/dy de uma linha características, obtém-se:

$$\frac{dv}{du} = - \left[\frac{-\frac{uv}{c^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \right] \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (4.30)$$

Novamente fazendo as substituições das equações (4.23) e (4.24) em (4.30), pode-se obter:

$$\frac{d(\|\vec{u}\| \sin \theta)}{d(\|\vec{u}\| \cos \theta)} = \left[\frac{M^2 \sin \theta \cos \theta \pm \sqrt{M^2 - 1}}{(1 - M^2 \sin^2 \theta)} \right] \quad (4.31)$$

Que com alguma manipulação resulta em, tal como demonstrado em Anderson (2003):

$$d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{d\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{du}{u} \quad (4.32)$$

Com cada um dos valores de $d\theta$ indicativos de uma única linha característica, definidas por C_+ quando $d\theta = +\sqrt{M^2 - 1} \frac{du}{u}$ e C_- quando $d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{du}{u}$.

A expressão (4.32) é idêntica a expressão para o escoamento de Prandtl-Meyer observada em Zucker (1977), cuja integração resulta no valor do ângulo de Prandtl-Meyer. Desta forma, a expressão (4.32) pode ser reescrita como:

$$d\theta \pm dv = 0 \quad (4.33)$$

Integrando indefinidamente a expressão (4.33) obtém-se:

$$\boxed{\theta \pm v = cte = K}$$

Tal resultado ilustra que, dependendo da linha característica, os valores da soma ou subtração do ângulo do vetor velocidade em relação a um dado eixo definido, são constantes e iguais a uma variável K , similar aos invariantes de Riemann, tal como ilustrado tanto por Anderson (2003), Hodge (1995) e Shapiro (1953). Separando cada invariante de acordo com cada uma das linhas características:

$$\boxed{\theta + v = K_-} \quad (4.34)$$

$$\boxed{\theta - v = K_+} \quad (4.35)$$

Com (4.34) ao longo da característica negativa e (4.35) da positiva. A partir destes resultados é possível seguir com a caracterização dos pontos internos da malha de um escoamento bem como uma eventual interação com as paredes. Tal discussão será feita na seção que se segue.

4.2.2.1. Pontos internos da malha

A figura 4.12 traz a representação esquemática de 3 pontos a,b e c, interno a malha fluida, com a e b em duas características diferentes e c o ponto de intersecção destas. Conforme visto, ao longo de uma mesma curva característica mantém-se os invariantes de Riemann de acordo com seu tipo, positiva ou negativa. Destes valores sabidos, é possível determinar o número de Mach no ponto c bem como sua posição no espaço, desde que a dos dois outros pontos já seja conhecida.

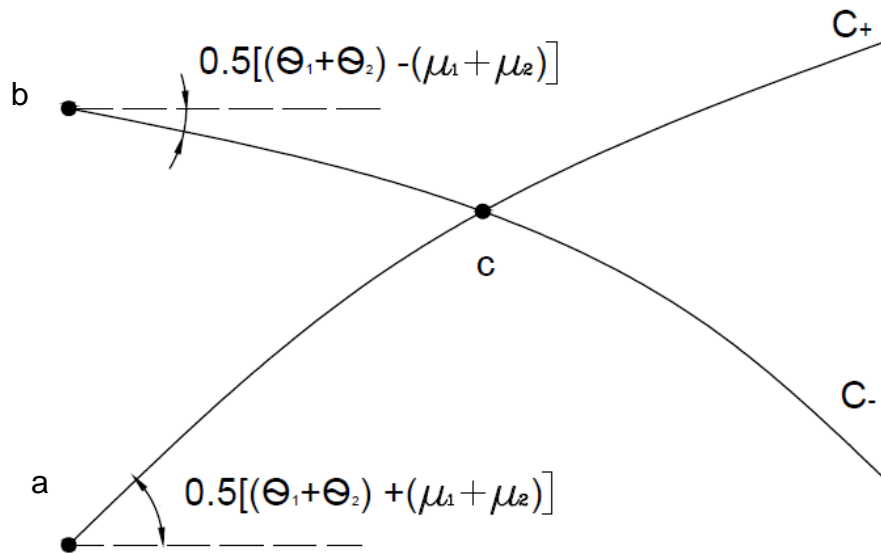


Figura 4.12 – Linhas características internas a um escoamento

Para a característica positiva, tem-se:

$$K_+ = cte \Rightarrow \theta_a - v_a = \theta_c - v_c \quad (4.36)$$

E para a negativa:

$$K_- = cte \Rightarrow \theta_b + v_b = \theta_c + v_c \quad (4.37)$$

É fácil notar que estas equações definem um sistema determinado, possibilitando a obtenção do ângulo de Prandtl-Meyer e daquele do vetor velocidade local em

relação ao eixo das abscissas arbitrado. Do ângulo de Prandtl-Meyer é possível determinar o número de Mach para o caso de um gás perfeito, conforme todo desenvolvimento feito por Zucker (1977) segundo a expressão:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1} (M^2 - 1)} \right) - \arctg \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) \quad (4.38)$$

E com ele, o ângulo de Mach conforme explicitado pela equação (4.26). Com estes valores e sabendo as propriedades de estagnação do escoamento, no caso do bocal de um míssil com escoamento suposto isentrópico (ao menos longe da parede), as próprias pressões e temperaturas da câmara de combustão.

Para finalizar tal análise, resta verificar a posição de tal ponto c sabidas as posições dos demais pontos da figura 4.12. Desta figura, nota-se que o ângulo de inclinação de cada característica é dado pela média aritmética do ângulo que estas fazem com o eixo das abscissas de referência, tal como ilustrado na figura 4.11. Desta forma, supondo os pontos tão próximos quanto se queira de forma a sua conexão ser feita por segmentos de retas, tem-se que o coeficiente angular das retas são definidos por:

$$m_a = tg \left(\frac{1}{2} (\theta_a + \theta_c - \mu_a - \mu_c) \right) \quad (4.39)$$

$$m_b = tg \left(\frac{1}{2} (\theta_b + \theta_c + \mu_b + \mu_c) \right) \quad (4.40)$$

Assim, as equações que ligam os pontos consecutivos são dadas por:

$$y_c = y_a + m_a(x_c - x_a) \quad (4.41)$$

$$y_c = y_b + m_b(x_c - x_b) \quad (4.42)$$

Subtraindo a equação (4.42) de (4.41) e isolando x_c , tem-se que:

$$x_c = \frac{y_b - y_a + m_b x_b - m_a x_a}{m_b - m_a} \quad (4.43)$$

E o valor de y_c pode ser encontrado substituindo o valor obtido em (4.43) ou em (4.41) e (4.42).

4.2.2.2. Ponto de parede

A figura 4.13 ilustra um ponto de parede, com c numa posição tal que o ângulo que a parede faz com a horizontal é dado por θ_{parede} .

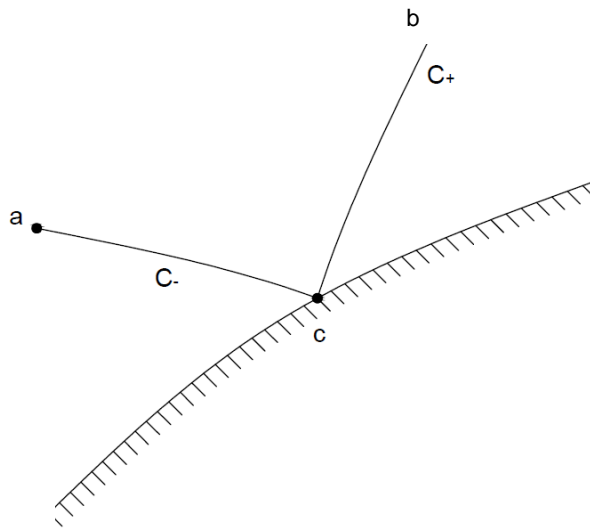


Figura 4.13 – Ponto de parede

Neste caso fica fácil notar que a posição do ponto c é univocamente determinada pelo encontro das características positiva e negativa. Da característica negativa, tem-se:

$$K_- = \theta_a + v_a = \theta_{parede} + v_{parede} \Rightarrow v_{parede} = \theta_a - \theta_{parede} + v_a \quad (4.44)$$

Determinado este valor, conforme já visto na seção 4.2.2.1, o número de Mach e ângulo de Mach podem ser facilmente determinados assim como todas as demais propriedades. Nota-se, também, que a partir do valor do ângulo de Prandtl-Meyer do ponto da parede é possível determinar o invariante de Riemann para a linha característica positiva:

$$K_+ = \theta_b - \nu_b = \theta_{parede} - \nu_{parede} \quad (4.45)$$

Para finalizar tal análise, resta verificar a posição de tal ponto c sabidas as posições dos demais pontos da figura 4.13. Desta figura, nota-se que o ângulo de inclinação de cada característica é dado pela média aritmética do ângulo que estas fazem com o eixo das abscissas de referência, tal como ilustrado na figura 4.11. Desta forma, supondo os pontos tão próximos quanto se queira de forma a sua conexão ser feita por segmentos de retas, tem-se que o coeficiente angular das retas são definidos por:

$$m_a = tg \left(\frac{1}{2} (\theta_a + \theta_{parede} - \mu_a - \mu_{parede}) \right) \quad (4.46)$$

$$m_b = tg \left(\frac{1}{2} (\theta_b + \theta_{parede} + \mu_b + \mu_{parede}) \right) \quad (4.47)$$

Assim, as equações que ligam os pontos consecutivos são dadas por:

$$y_{parede} = y_a + m_a(x_{parede} - x_a) \quad (4.48)$$

$$y_{parede} = y_b + m_b(x_{parede} - x_b) \quad (4.49)$$

Subtraindo a equação (4.49) de (4.48) e isolando x_{parede} , tem-se que:

$$\boxed{x_{parede} = \frac{y_b - y_a + m_b x_b - m_a x_a}{m_b - m_a}} \quad (4.50)$$

E o valor de y_{parede} pode ser encontrado substituindo o valor obtido em (4.50) ou em (4.46) e (4.47).

4.2.3. Aplicação na determinação da geometria da parede de bocais de mínimo comprimento

Este tema é largamente abordado na bibliografia, sendo foco de particularização tanto de Anderson (2003) bem como de Hodge (1995). Shapiro descreve como fazer o projeto de um bocal supersônico pelo método das características para bocais de túneis de vento. Mais recentemente alguns trabalhos fazem uso da técnica das características para projetos de bocais de mínimo comprimento, tais como os de Khan (2013) que, assim como Ali (2002) meramente propões um método numérico para o projeto de bocais planos; ou ainda o trabalho de Zebbiche (2006) que visa o projeto de tais bocais de mínimo comprimento para elevadas temperaturas do escoamento, determinando cada um dos ângulos característico e demais variáveis como função da temperatura. Por fim, vale citar o trabalho de Olson (2012) acerca da simulação em bocais sobre expandidos de vórtices de grande magnitude.

Aqui serão somente apresentados os conceitos fundamentais que permitem garantir um bocal tão curto quanto possível. Esta característica é de sobremodo desejada neste tipo de máquina uma vez que o peso próprio é um fator limitante quanto a missão a ele destinada, bem como maiores requisitos de empuxo para elevá-lo até a condição ideal de retorno. A figura 4.14 extraída de Anderson (2003) traz um esquema de um bocal convergente-divergente qualquer.

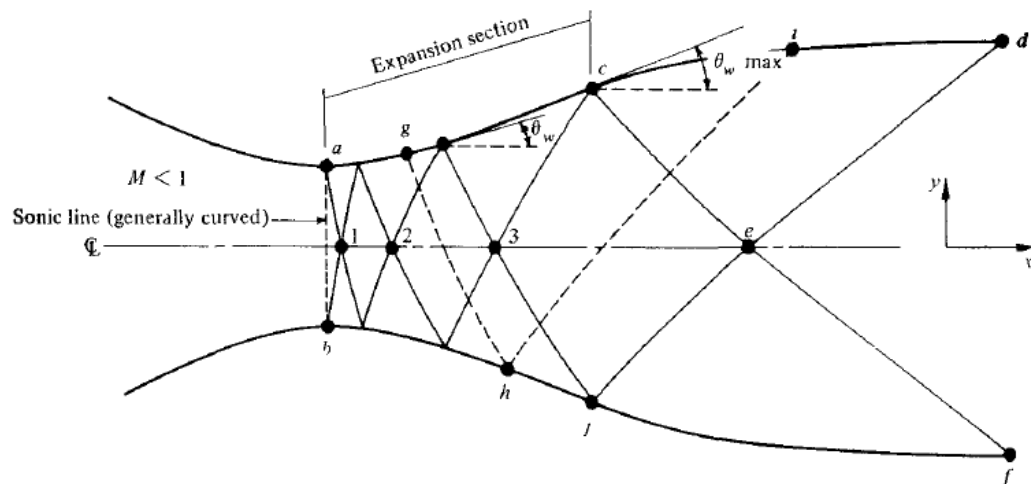


Figura 4.14 – Representação de um bocal convergente-divergente e suas linhas de Mach (Anderson, 2003)

Há duas regiões típicas na porção divergente deste ente. A primeira é a região de expansão, na qual a aceleração do fluido. Esta região caracteriza-se pela parede ter concavidade voltada para a porção externa a fim de garantir uma expansão eficiente, tal como ilustrado por Hodge (1995). A segunda seção visa eliminar as reflexões das linhas de Mach, sendo esta inicialmente com curvatura para a região interna até se obter paralelismo entre as paredes. Esta situação não é buscada num bocal de foguete ou de míssil. A figura 4.15, também oriunda de Anderson (2003) traz a situação desejada.

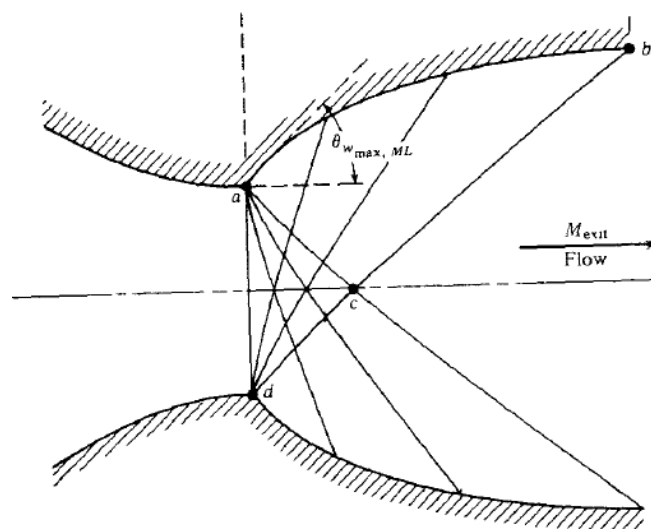


Figura 4.15 – Bocal divergente curto (Anderson, 2003)

No caso da figura 4.15 nota-se que não há a região de expansão propriamente dita, sendo esta ocorrendo no espaço mais curto possível. Isto implica, para um dado número de Mach na saída um ângulo de inclinação máximo inicial para parede, na junção com a garganta definida pela porção convergente do elemento propulsor. A meta que se segue é determinar tal ângulo somente em função do número de Mach na saída. Para tanto, consideram-se os pontos a, c e b todos, por hipótese localizados na mesma linha de Mach. Também se assume que a linha de centro do bocal serve como uma parede com inclinação nula em relação a horizontal definida ($\theta_{parede} = 0$).

Da característica que liga os pontos b e c, com b um ponto da seção de descarga do bocal, com o número de Mach desejado na saída.

$$K_+ = \theta_b - v_b(M_{saída}) = \theta_c - v_c \Rightarrow v_c = v_b(M_{saída}) - \theta_b \quad (4.51)$$

No limite final da parede externa, supõe-se que seu ângulo local com relação a horizontal é nulo, implicando na relação (4.52):

$$v_c = v_b(M_{saída}) \quad (4.52)$$

Tomando procedimento similar em relação a característica negativa que conecta o ponto a (de ângulo máximo) e c (parede), tem-se:

$$K_- = \theta_a + v_a = v_c \Rightarrow \theta_{max} + v_a = v_b(M_{saída}) \quad (4.53)$$

Sendo o ponto a na garganta, tem-se que o número de Mach em a é o unitário. Assim, segundo Anderson (2003), $v_a = \theta_{max}$, assim:

$$\theta_{max} = \frac{1}{2} v(M_{saída}) \quad (4.54)$$

Que permite facilmente determinar o ângulo máximo de projeto para o bocal. Tal informação será de grande valia no desenvolvimento do roteiro de simulação computacional.

4.3. PROJETO DE BOCAL CONVERGENTE PELO MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO HODOGRÁFICA

Esta parte do projeto se resume a avaliação da melhor geometria para o projeto da porção convergente do bocal convergente-divergente para o míssil proposto. Para tanto, valer-se-á da aplicação da transformação hodográfica a fim de prover maior facilidade na solução do problema. Tal método, descrito por Shapiro (1953) consiste na transformação do sistema de coordenadas de estudo, no caso coordenadas de posição, para um sistema nos quais as coordenadas são definidas segundo velocidades, isto é, a posição do corpo passa a ser função do campo de velocidades tal como:

$$x = f(u) \quad (4.55)$$

Naturalmente a transposição das coordenadas físicas para coordenadas dependentes da velocidade, gera uma distorção do problema no plano hodográfico o que, segundo Shapiro (1953) acarreta em dificuldades na resolução analítica para casos mais complexos.

O que se pretende ao utilizar a transformação hodográfica é seguir a metodologia discutida em Cook (1999) e posteriormente em Kryeziu (2013) para a determinação da geometria de um bocal convergente com condições de estagnação as mesmas que aquelas de um tanque ou câmara de combustão. O trabalho de Kryeziu (2013) é muito mais uma revisão daquele de Cook (1999), expandindo a análise também para escoamentos supersônicos. Aqui será apresentada toda a construção matemática que define o problema do bocal subsônico, para posteriormente, na seção de metodologia, aplicar o método das diferenças finitas (MDF) em sua solução. Vale ressaltar que Courant (1962) em meio as suas

discussões acerca de equações diferenciais parciais alude a este problema quando trata de equações elípticas, caso este a ser tratado aqui conforme será visto posteriormente.

A princípio, considerou-se o escoamento em questão como irrotacional, adiabático, em regime permanentes, ou seja, um escoamento potencial, tal como feito na seção 4.2 quando discutido o método das características. Tal hipótese justifica-se novamente pela divisão dos fenômenos dentro do escoamento do bocal nas imediações da parede e ao longe, este último suposto potencial. Também ressalta-se que o método hodográfico tem seu desenvolvimento todo baseado nestas hipóteses, conforme apresentado em Shapiro (1953).

O sistema de equações iniciais úteis para a solução do problema estão na definição da irrotacionalidade, continuidade e de Bernoulli para o escoamento plano considerado. Neste caso, diferentemente daquele apresentado no capítulo 4.2, tem-se como coordenada em y o próprio raio do bocal, variável ao longo do comprimento. A condição de irrotacionalidade para o caso plano:

$$\nabla x \vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.56)$$

A equação da continuidade é pouco diferente daquela determinada pela equação (4.11) pela existência de um termo característico da axissimetricidade do problema em questão dado pela transformação em coordenadas cilíndricas, tal como apresentado por Cook (1999) e Coubert (1962):

$$(c^2 - u^2)u_x - uv(u_r + v_x) + (c^2 - v^2)v_r + \chi \frac{c^2}{r} v = 0 \quad (4.57)$$

E a equação de Bernoulli:

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} c^{*2} \quad (4.58)$$

Com c^{*2} a velocidade sônica quando $Mach = 1$ e c a velocidade sônica local. A figura 4.16 apresenta uma representação física para o problema.

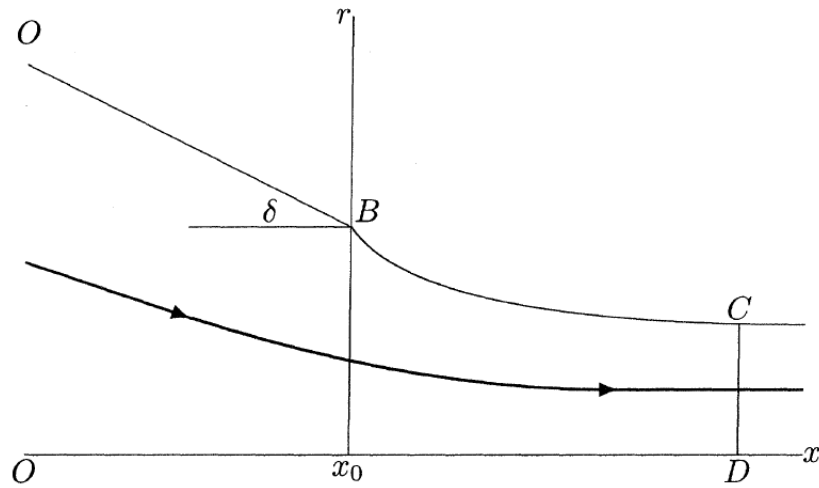


Figura 4.16 – Representação física do escoamento (Cook, 1999)

Da análise da figura 4.16 podem-se lançar as condições de contorno para o problema. A primeira é relacionada a inexistência de componentes radiais de velocidade na linha de corrente central, ou seja, a hipótese de que no centro do bocal o escoamento é unidimensional:

$$v = 0 \text{ para } r = 0$$

A segunda condição de contorno se relaciona a hipótese de aderência a parede do bocal. Por esta o vetor velocidade é tangente a parede dada a existência de uma linha de corrente também tangente a esta. Assim:

$$\operatorname{tg}(-\delta) = \frac{v}{u} \text{ na linha } OB$$

A terceira, diz respeito a velocidade do escoamento ao longe da seção de descarga do bocal, no caso, a velocidade sônica. Para o projeto em questão, calcular-se há para diferentes inclinações do bocal a posição em que se tem o escoamento sônico (ou ao menos aproximadamente sônico) bem como a determinação das linhas de corrente característica no plano físico, permitindo assim estender toda a superfície do bocal de tal maneira que se obtenha o escoamento sônico na garganta. A condição:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \infty$$

Por fim destaca-se a condição de contorno acerca do escoamento em uma linha de corrente qualquer. Nesta o escoamento é suposto homentrópico, isto é, com entropia constante ao longo de uma linha de corrente (Cook, 1999) e a velocidade é constante:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2} = u_0 \text{ e } \frac{dr}{dx} = \frac{v}{u}$$

Com a alteração das coordenadas para o plano hodográfico, a indefinição da posição da linha de corrente deixa de existir, facilitando a análise. A condição de irrotacionalidade se torna:

$$\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u} = 0 \quad (4.59)$$

E a equação da continuidade:

$$(c^2 - u^2)r_v - uv(x_v + r_u) + (c^2 - v^2)x_u + \chi \frac{c^2}{r} v(x_u r_v - x_v r_u) = 0 \quad (4.60)$$

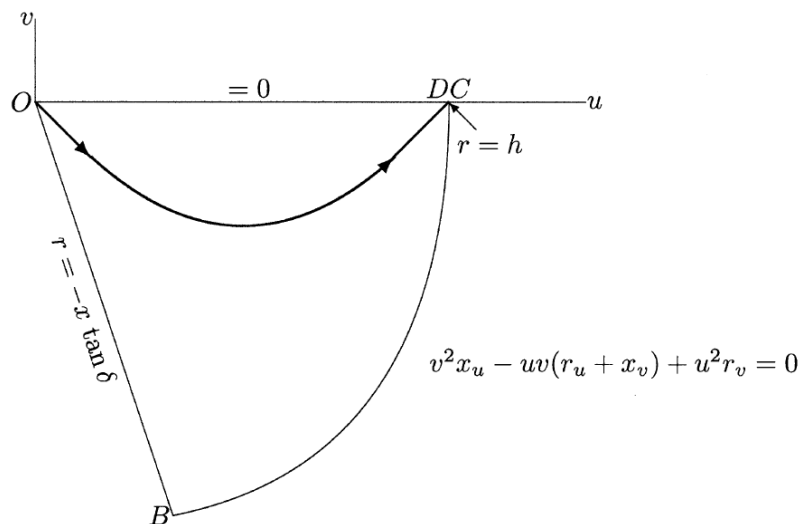


Figura 4.17 – Representação do problema no plano hodográfico (Cook, 1999)

Antes de continuar com as condições de contorno em plano de análise modificado tal como na figura 4.17, Cook (1999) apresenta os potenciais de Legendre como alternativa ao plano hodográfico. Tal potencial é definido de maneira bastante parecida em relação ao potencial de velocidades, entretanto a derivada deste em relação as componentes do vetor velocidade fornece a posição no plano físico. Por conseguinte, sua definição é dada por:

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \quad (4.61)$$

$$r = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad (4.62)$$

Sendo este concatenado ao potencial de velocidades por:

$$\Phi(u, v) = xu + rv - \phi(x, r) \quad (4.63)$$

Aplicando as transformações na equação (4.60), tem-se em termos de potenciais de Legendre a equação da continuidade:

$$(a^2 - u^2)\Phi_{vv} + 2uv\Phi_{uv} + (c^2 - v^2)\Phi_{uu} + \chi \frac{c^2 v}{\Phi v} (\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2) = 0 \quad (4.64)$$

Com χ igual a 0 quando o escoamento é plano e igual a um quando o escoamento é axissimétrico. Esta equação pode ser dividida em duas parcelas distintas:

$$L[\Phi] = (a^2 - u^2)\Phi_{vv} + 2uv\Phi_{uv} + (c^2 - v^2)\Phi_{uu} \quad (4.65)$$

$$N[\Phi] = \frac{c^2 v}{\Phi v} (\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2) \quad (4.66)$$

A primeira parcela também é discutida em Courant (1962). Esta se trata de uma equação diferencial parcial de Monge-Ámpère. Cook (1999) ainda ressalta que seu tipo depende do número de Mach do escoamento: se $M > 1$ o problema é elíptico, caso contrário, se $M < 1$, o problema é hiperbólico. Desenvolvendo a

expressão (4.65) de forma a eliminar qualquer componente de velocidade, a partir da substituição $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2}$ e $\text{tg}\theta = v/u$:

$$L[\Phi] = \|\mathbf{u}\|^2 \Phi_{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|} + \frac{(k+1)(c^{*2} - \|\mathbf{u}\|^2)}{(k+1)c^{*2} - (k-1)\|\mathbf{u}\|^2} (\|\mathbf{u}\| \Phi_{\|\mathbf{u}\|} + \Phi_{\theta\theta}) \quad (4.64)$$

Desenvolvidas as expressões em termos dos potenciais de Legendre, resta apresentar as condições de contorno segundo as transformações realizadas. A condição de contorno relacionada a aderência da linha de corrente a parede se torna uma condição de Neumann dada por:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0 \text{ e } \theta=-\delta} = 0$$

A condição de velocidade constante ao longo de uma linha de corrente genérica BC também é uma condição de Neumann:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \|\mathbf{u}\|_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \|\mathbf{u}\|} \right|_{\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{u}\|_0} = 0$$

A condição de contorno relacionada as condições de estagnação se trata de uma condição de Dirichlet:

$$\Phi|_{\|\mathbf{u}\|=0} = 0$$

Finalmente, a última condição, também de Neumann, passa a ser a altura da seção na qual o escoamento é sônico, isto é:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0 \text{ e } \|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{u}\|_0} = 0$$

A figura 4.17 ilustra o problema no plano $\theta x \|\mathbf{u}\|$, sendo tal extraída de Cook (1999).

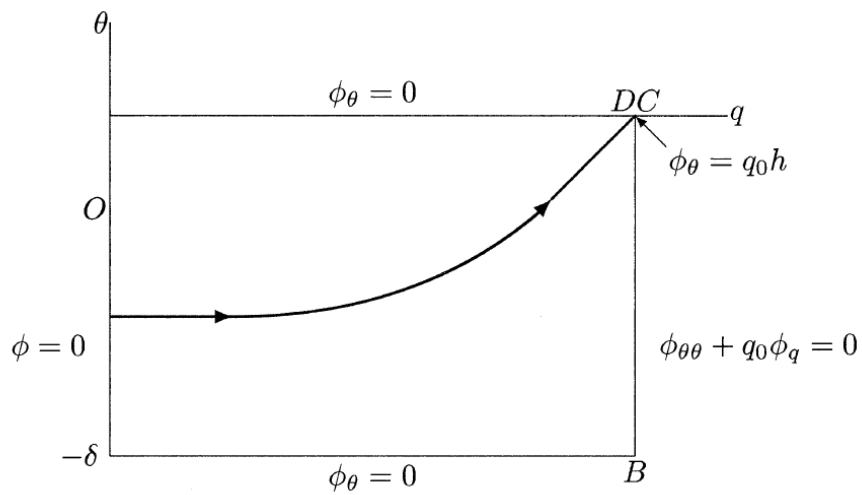


Figura 4.18 - Problema apresentado no plano $\theta x || \mathbf{u} ||$

4.4. ESCOAMENTO QUASE-UNIDIMENSIONAL EM BOCAIS CONVERGENTE-DIVERGENTE

A figura 4.19 ilustra a situação em análise. Ela apresenta uma seção de um bocal convergente-divergente com variação infinitesimal das propriedades entre a seção 1 e 2 distantes dx uma da outra. O escopo desta análise é determinar as variações infinitesimais para estas propriedades ao longo do tempo e da direção x , paralela ao eixo do elemento, e com estas, modelar o fenômeno do escoamento compressível a partir de equações diferenciais parciais adequadas.

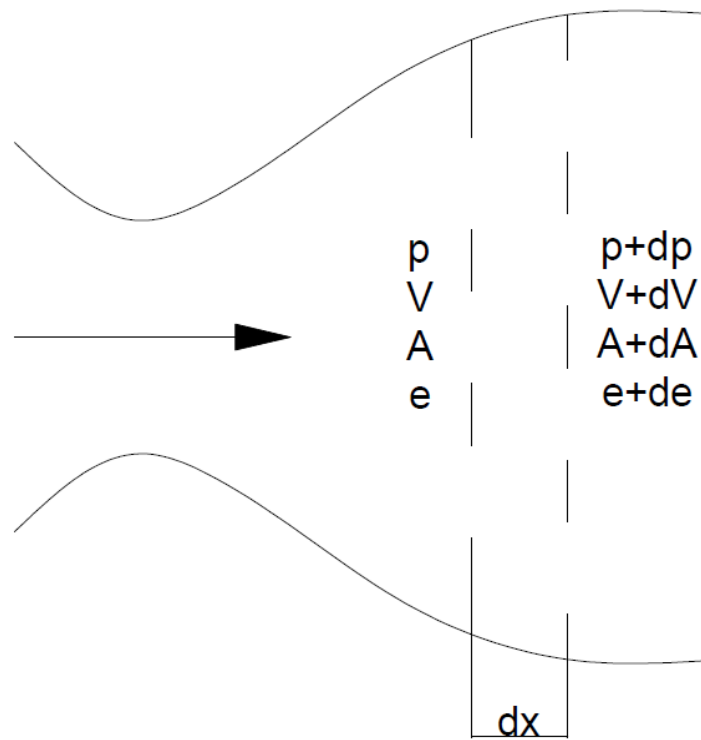


Figura 4.19 – Bocal quase-unidimensional convergente-divergente

Para a determinação da equação da conservação da massa, inicia-se avaliando a equação da continuidade em sua forma integral, tal como apresentada em Anderson (1995)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho dV + \iint_{S.C.} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (4.65)$$

O segundo termo da equação (4.65) equivale a verificar os fluxos de massa através das superfícies de controle. De fato, ela representa a variação temporal da massa através das superfícies do volume de controle unidimensional adotado na figura 4.19. Na seção a montante tem-se que o vetor velocidade faz um ângulo de 180° com a normal da superfície, desta forma o valor do produto apresentado será negativo. O contrário ocorre na superfície de saída, isto é, o vetor velocidade do escoamento nesta seção está na mesma direção e sentido da normal (convencionada positiva apontando para fora da superfície de controle), acarretando em valor positivo do produto escalar. Naturalmente não há vazão mássica nas

superfícies laterais dado que não há componentes, por hipótese de escoamento quase-unidimensional, de velocidades não-perpendiculares as normais destas superfícies.

O primeiro termo da equação (4.65) traz uma integral tripla no volume de controle, implicando que este termo avalia a taxa de variação temporal da massa total no interior do volume de controle. Este é o termo que indica se há ou não acúmulo de massa ao longo do tempo no interior do volume de controle, sendo assumido nulo no caso da análise em regime estacionário, no qual não há interesse no caráter transitório de, por exemplo, uma câmara de gás esvaziando. Do exposto, pode-se dizer que a equação (4.65), em termos dos parâmetros da figura 4.19 ode ser reescrita como:

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} + \left\{ \underbrace{[(\rho + d\rho)(A + dA)(V + dV)]}_{\text{Descarga}} - \underbrace{\rho AV}_{\text{Entrada}} \right\} = 0 \Rightarrow$$

Fazendo a distributiva e desprezando os termos de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} + \rho A dV + \rho V dA + V A d\rho = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} + d(\rho AV) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Que é a equação da continuidade para o caso de um escoamento quase-unidimensional.

A equação da conservação da quantidade de movimento também pode ser obtida de maneira semelhante à da continuidade. Em sua forma integral, para o caso de um fluido não-viscoso, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho u dV + \iint_{S.C.} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \iint_{S.C.} p dS_x \quad (4.67)$$

O primeiro termo da equação (4.67) diz respeito a quantidade de movimento associada ao deslocamento da massa fluída contida no volume de controle na direção x, desta forma, quando integrada ao longo do elemento infinitesimal é idêntica a $(\rho V A dx)$. A segunda integral da expressão, esta avaliando a taxa de

variação do *momentum* nas superfícies de controle do volume fluído. Novamente não há componentes avaliáveis nas fronteiras laterais do volume de controle dada a perpendicularidade entre estas normais e a componente de velocidade do escoamento, restando, novamente, somente a avaliação em cada uma das superfícies de controle perpendiculares ao eixo de simetria axial do bocal. Seu valor, em termos das propriedades expressas na figura 4.19 e desprezando termos de 2ª ordem ou superiores:

$$\begin{aligned} \iint_{S.C.} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS &= [(\rho + d\rho)(A + dA)(V + dV)^2] - \rho AV^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \iint_{S.C.} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS &= AV^2 d\rho + \rho V^2 dA + 2\rho AV dV = d(\rho AV^2) \end{aligned} \quad (4.68)$$

O termo de pressão após a igualdade é de mais difícil avaliação. Anderson (1995) apresenta uma figura com as forças relacionadas ao campo de pressões aplicadas a cada face do volume de controle da figura 4.19. Estas resultantes estão reproduzidas na figura 4.20.

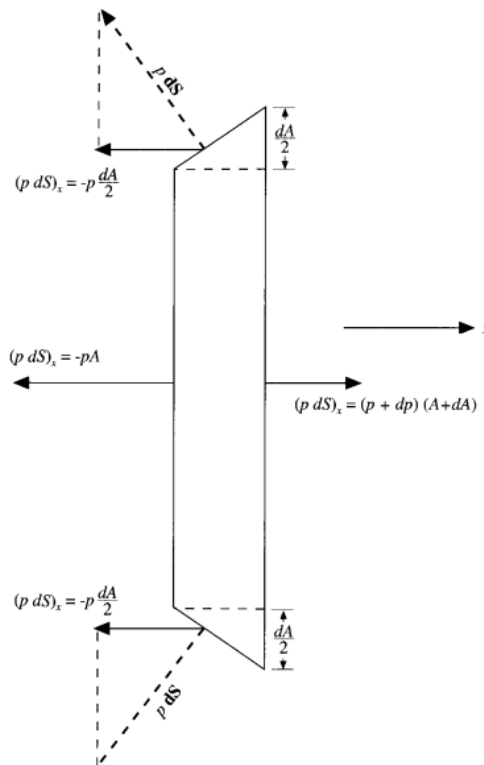


Figura 4.20 – Distribuição das forças relacionadas as pressões atuantes no elemento fluído

Da avaliação da figura 4.20, conclui-se que a integral das forças de pressão sobre as superfícies de controle orientadas segundo o eixo x , o de simetria axial é dada pela expressão (4.69).

$$\begin{aligned} \iint_{S.C.} p dS_x &= [(p + dp)(A + dA)] - [pA + p dA] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_{S.C.} p dS_x = A dp \end{aligned} \quad (4.69)$$

Substituindo (4.68) e (4.69) em (4.67):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V A dx)}{\partial t} + d(\rho A V^2) &= -A dp \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial(\rho A V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V^2)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} & \end{aligned} \quad (4.70)$$

Multiplicando a equação (4.66) por V e subtraindo da equação (4.70):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho A V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V^2)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} - V \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} - V \frac{\partial(\rho A V)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial A}{\partial t} + A V \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \left(2V \rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V^2 \frac{\partial A}{\partial x} + A V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} \\ - \left(\rho V \frac{\partial A}{\partial t} + A V \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \left(\rho V^2 \frac{\partial A}{\partial x} + A V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho A V \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho A V \frac{\partial V}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0} & \end{aligned} \quad (4.71)$$

Que é a equação da quantidade de movimento para o escoamento quase-unidimensional.

Por fim, equação da energia pode ser obtida da mesma maneira. Antes, ressalta-se que, para o caso analisado, as seguintes hipóteses são válidas: escoamento adiabático, sem realização de trabalho através de forças viscosas, mas

tão somente pela ação do capô de pressões. Desta forma, a equação da energia na forma integral (Anderson, 1995):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V.C.} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dV + \iint_{S.C.} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = - \iint_{S.C.} p (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.72)$$

O mesmo procedimento dos casos anteriores será aplicado. A integral tripla descreve a variação da energia total no interior do volume de controle, sendo dada por:

$$\iiint_{V.C.} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dV = \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) A dx \quad (4.73)$$

Já a segunda integral do lado esquerdo da igualdade (4.72) diz respeito ao fluxo de energia que entra e sai do volume de controle através das superfícies de controle nas quais a direção da velocidade do escoamento não é perpendicular a normal. A equação (4.74) demonstra o equivalente da integral de área.

$$\begin{aligned} \iint_{S.C.} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS &= \left\{ (\rho + d\rho) \left[\left(e + de \right) + \frac{(V + dV)^2}{2} \right] (V + dV)(A + dA) \right\} - \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) AV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_{S.C.} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \underbrace{(\rho e A dV + \rho e V dA + \rho A V de + e A V d\rho)}_{=d(\rho e AV)} + \frac{1}{2} \underbrace{(3\rho A V^2 dV + \rho V^3 dA + A V^3 d\rho)}_{=d(\rho A V^3)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_{S.C.} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = d(\rho e AV) + \frac{1}{2} d(\rho A V^3) \end{aligned} \quad (4.74)$$

O termo de pressões pode ser definido segundo as pressões da figura 4.20.

$$\iint_{S.C.} p (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = [(p + dp)(A + dA)(V + dV)] - [pAV + pVdA] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_{S.C.} p(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = pAdV + pVdA + VAdp = d(pAV) \quad (4.75)$$

Substituindo (4.73) a (4.75) em (4.72):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) A \right] + \frac{\partial(\rho eAV)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho AV^3)}{\partial x} + \frac{\partial(pAV)}{\partial x} = 0} \quad (4.76)$$

Que é a equação da energia na forma conservativa. Com mesmo artifício utilizado para obtenção da equação da quantidade de movimento será determinada a equação da energia em sua forma não conservativa. Multiplicando a equação da continuidade pela energia interna e subtraindo da equação (4.76):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) A \right] + \frac{\partial(\rho eAV)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho AV^3)}{\partial x} + \frac{\partial(pAV)}{\partial x} - e \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} - e \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho A \frac{\partial e}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial e}{\partial x} = -p \frac{\partial(AV)}{\partial x} \Rightarrow \rho A \frac{\partial e}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial e}{\partial x} &= -pV \frac{\partial A}{\partial x} - pA \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho V \frac{\partial e}{\partial x} &= -\frac{pV}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - p \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho V \frac{\partial e}{\partial x} = -pV \frac{\partial \ln(A)}{\partial x} - p \frac{\partial V}{\partial x}} &\quad (4.77) \end{aligned}$$

Para um gás perfeito, a energia interna é dada por:

$$e = c_v T$$

Desta forma, equação da energia pode ser reescrita em termos do calor específico a volume constante, resultando em:

$$\Rightarrow \boxed{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v V \frac{\partial T}{\partial x} = -pV \frac{\partial \ln(A)}{\partial x} - p \frac{\partial V}{\partial x}} \quad (4.78)$$

Ou ainda em termos da razão de calores específicos, sabendo que:

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} \Rightarrow \boxed{c_v = \frac{R}{k - 1}}$$

Com R a constante dos gases ideais para o fluido de trabalho. Substituindo esta expressão em (4.78):

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho R}{k - 1} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho R V}{k - 1} \frac{\partial T}{\partial x} = -pV \frac{\partial \ln(A)}{\partial x} - p \frac{\partial V}{\partial x}} \quad (4.79)$$

4.5. ESCOAMENTOS TURBULENTOS

Com o escopo de simular o escoamento viscoso através do bocal convergente-divergente proposto ao míssil, será empregada simulação computacional através do método dos volumes finitos através da utilização de um software comercial. Para tanto faz-se necessário apresentar os fundamentos deste método de maneira bastante resumida a fim de fornecer os princípios necessários para a solução dos casos propostos.

4.5.1. Conceitos fundamentais

Conforme exposto em Maliska (2013) e Malalasekera (1995), as equações diferenciais que regem os fenômenos de transporte do escoamento podem ser representados genericamente por uma equação que além do termo transiente traz consigo os termos relacionados ao transporte convectivo, difusivo além do termo

fonte. Se escrita em termos de ϕ , qualquer propriedade por unidade de massa, tem-se que:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + S_\phi \quad (4.80)$$

Para o caso de $\phi = 1$, $s_\phi = 0$ e $\Gamma_\phi = 0$, tem-se a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.81)$$

Já se $\phi = T$, $\Gamma_T = k/c_p$, $S_T = \frac{1}{c_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu}{c_p} \Phi$ - com Φ o termo de dissipação viscosa, k o coeficiente de condutividade térmica, c_p o calor específico e μ a viscosidade do fluido – tem-se a equação da energia (ou 1ª Lei da Termodinâmica):

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}T) = \nabla \cdot \left(\frac{k}{c_p} \nabla T \right) + \frac{1}{c_p} \frac{DP}{Dt} + \frac{\mu}{c_p} \Phi \quad (4.82)$$

Com $\phi = u_i$ e $\Gamma_{u_i} = \mu$, tem-se cada um dos componentes da equação da quantidade de movimento, com $i = 1, 2$ e 3 respectivamente correspondendo as direções x, y e z num sistema de coordenadas cartesiano, tipicamente utilizado com malhas estruturadas.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}u) = \nabla \cdot (\mu \nabla u) - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}v) = \nabla \cdot (\mu \nabla v) - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}w) = \nabla \cdot (\mu \nabla w) - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4.85)$$

O conjunto de equações de (4.80) a (4.85) somadas a equação de estado para gases ideais ou reais, são suficientes para a solução de escoamentos a baixas velocidades em regime laminar. Entretanto, quando se trata de escoamentos através de bocais convergente-divergentes há uma grande variação da velocidade ao longo do percurso desde a câmara de combustão até a seção de descarga do bocal. Desta

forma não se tem escoamento puramente laminar já que o número de Reynolds cresce de maneira muito rápida, garantindo que há escoamento turbulento ao longo do escoamento, fazendo-se necessário lidar com este fenômeno ao resolver o escoamento.

De maneira bem simplista, a turbulência é um fenômeno caracterizado por oscilações caóticas e aleatórias das propriedades do escoamento ao longo do tempo. Este tipo de escoamento é regido pelas forças inerciais do fluido e caracterizado pela presença de vórtices de diferentes dimensões que transferem partículas fluídas de uma região para outra, acarretando em bruscas mudanças de momento e garantindo misturas mais eficientes (daí a necessidade desta em motores a combustão que utilizam ciclo Diesel). O tratamento matemático para tal consiste na formulação de que uma propriedade pode ser representada por um valor médio adicionado de uma variação, dado por:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

Substituindo esta expressão nas equações (4.80) a (4.85) e tomando seu valor médio é obtido um sistema de equações que leva em conta as flutuações características de escoamentos turbulentos a partir de termos denominados tensões de Reynolds. Este conjunto de equações é dado pelas equações (4.86) a (4.90), conforme listadas em Malalasekera (1995), para o caso de escoamento compressível.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u}) = 0 \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{u}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{u}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} u'^2)}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} u' v')}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} u' w')}{\partial z} \right] + S_u \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{v}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} v' u')}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} v'^2)}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} v' w')}{\partial z} \right] + S_v \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \vec{w})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{w}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{w}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} w' u')}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} w' v')}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} w'^2)}{\partial z} \right] + S_w \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} T) = \nabla \cdot (\mu \nabla T) + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} u' T')}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} v' T')}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} w' T')}{\partial z} \right] + S_T \quad (4.90)$$

A solução deste conjunto de equações, denominado *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS) ou *Favre Averaged Navier-Stokes* traz dificuldades computacionais tendo em vista a escala de tempo e de comprimento dos fenômenos envolvidos. Há, conforme exposto em Malalasekera (1995) três principais modos de solução para tal conjunto de equações.

O primeiro diz respeito a simulação de grandes vórtices, baseado na simulação em regime transiente que computa os vórtices de maior dimensão rejeitando os de escalas de comprimento diminuta, que passam a ser considerados a partir da adoção de um *sub-grid*. Este problema traz dificuldades em relação ao tempo de processamento dada a necessidade de simular todo o transiente em malhas pequenas além de problemas com geometrias complexas.

A solução direta da RANS se mostra de difícil implementação até os dias atuais tendo em vista a escala diminuta do fenômeno da turbulência tanto em termos de tempo como em escalas de comprimento, requisitando malhas muito finas e passos temporais muito diminutos a fim de capturar toda a história do escoamento, garantindo, desta forma, convergência. Dadas estas necessidades, não há recurso computacional disponível para a solução direta de maneira adequada, inviabilizando seu uso.

Por fim há o tratamento das equações a partir do uso de modelos de turbulência para a solução do escoamento. Esta modalidade de solução consiste em analisar as propriedades médias do escoamento e o efeito que as variações impõem sobre estas através da inclusão de novas equações ao sistema já explicitado. Em geral são classificados de acordo com o número de equações diferenciais que introduzem a resolução do problema, tal como explicitado em Cebeci (2004), literatura esta que em conjunto com ANSYS (2009) traz discussões acerca de uma série de modelos de turbulência.

No presente caso será utilizado um modelo de turbulência de duas equações diferenciais baseado nas hipóteses de Boussinesq para as tensões de Reynolds a ser discutido brevemente posteriormente. Antes, vale uma revisão acerca de dois

modelos de duas equações diferenciais bastante difundidos: $k - \epsilon$ standard e $k - \omega$ standard.

4.5.2. Modelos de turbulência

4.5.2.1. O modelo $k - \epsilon$ standard

O modelo $k - \epsilon$ standard é baseado no conceito da viscosidade induzida pelos vórtices. Sua nomenclatura se deve as variáveis introduzidas na resolução das equações diferenciais: k a energia cinética turbulenta e ϵ a taxa de dissipação viscosa, dadas por:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Os valores de k e ϵ são utilizados para definir as escalas de velocidade e comprimento característicos do escoamento turbulento, dados por:

$$\ell = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$$

$$\vartheta = k^{\frac{1}{2}}$$

As equações introduzidas no sistema de equações formado pelas RANS são análogas aquelas de transportes já deduzidas, sendo sempre um balanço das taxas de geração de k e ϵ , transporte convectivo e difusivo das propriedades, além das taxas de produção e destruição das mesmas. As equações (4.91) e (4.92) trazem ambas equações diferenciais.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \epsilon \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \epsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + 2C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.92)$$

Com μ_t a viscosidade induzida por vórtices, dada, através de análise dimensional, pela equação (4.93).

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.93)$$

Sendo, também, S_{ij} o tensor de deformações, dado por (4.94).

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Com

$$s_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$s_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y}$$

$$s_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z}$$

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u + u')}{\partial y} + \frac{\partial(v + v')}{\partial x} \right)$$

$$s_{xz} = s_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u + u')}{\partial z} + \frac{\partial(w + w')}{\partial x} \right)$$

$$s_{yz} = s_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(w + w')}{\partial y} + \frac{\partial(v + v')}{\partial z} \right)$$

Conforme previamente dito, o modelo $k - \epsilon$ standard é baseado nas hipóteses de Boussinesq, garantindo que as tensões de Reynolds sejam dadas pela equação (4.96).

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu k \delta_{ij} \quad (4.96)$$

Com δ_{ij} o tensor delta de Kronecker, o qual $\delta = 1$ quando $i = j$ e $\delta = 0$ quando $i \neq j$. As constantes adotadas para o modelo são resumidas na tabela 4.1 e foram adotadas a partir de extensa interpolação em variados escoamentos turbulentos.

Tabela 4.1 – Coeficientes usuais para o modelo $k - \epsilon$ standard

Coeficiente	Valor
C_μ	0,09
σ_k	1,00
σ_ϵ	1,30
$C_{1\epsilon}$	1,44
$C_{2\epsilon}$	1,92

Este modelo traz dificuldades na avaliação das características do escoamento nas proximidades da parede, daí a necessidade do uso de funções de parede, principalmente para avaliação do escoamento nestas proximidades em valores de número de Reynolds grandes e com gradientes adversos de pressão. Tal problema foi extensivamente estudado, destacando-se os extensivos esforços de Spalding (1970, 1973, 1977, 1980) em gerar e demonstrar resultados obtidos por outros pesquisadores. Malalasekera (1995), propõe o uso de funções de parede tais como descritas por (4.97) e (4.98).

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_p^+), k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \epsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (4.97)$$

$$T^+ = \sigma_{T,t} \left(u^+ + P \left[\frac{\sigma_{T,l}}{\sigma_{T,t}} \right] \right) \quad (4.98)$$

Com $\kappa = 0,41$ a constante de Von Karman, $E = 9,8$ como parâmetro da rugosidade da parede, $\sigma_{T,t}$ o número de Prandtl turbulento, $\sigma_{T,l} = \mu C_p / \Gamma_T$ o número de Prandtl laminar, com Γ_T a condutividade térmica. P é uma função de correção que depende da razão entre os números de Prandtl laminar e turbulento.

4.5.2.2. O modelo $k - \omega$

A maior diferença entre este modelo e o modelo $k - \epsilon$ está na escolha da escala de comprimento utilizada, deixando de ser baseada na taxa de dissipação viscosa, ϵ , e passando a se basear na frequência turbulenta, dada por:

$$\omega = \frac{\epsilon}{k}$$

Garantindo que:

$$\ell = \frac{\sqrt{k}}{\omega}$$

As equações de transporte são parecidas com aquelas do modelo $k - \epsilon$, sendo dadas por:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (4.99)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \omega) = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right) + \gamma_1 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_1 \rho \omega^2 \quad (4.100)$$

Com

$$P_k = 2\mu S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij}$$

E os coeficientes listados na tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Coeficientes usuais para o modelo $k - \epsilon$

Coeficiente	Valor
γ_1	0,553
σ_k	2,00
σ_ω	2,00
β_1	0,075
β^*	0,09

As tensões de Reynolds são dadas por:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

E

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

Esta abordagem é vista com bons olhos tendo em vista a habilidade em lidar com regiões próximas as paredes, onde os efeitos viscosos e gradientes adversos de pressão são importantes, sem a utilização de funções de parede para amortecer a solução. A grande dificuldade em sua aplicação reside no fato da dependência da solução do valor adotado para ω em escoamentos livres, tal como em regiões distantes a um corpo imerso em fluído, o que acarreta em resultados errados.

4.5.2.3. Modelo $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport)

Este modelo, proposto por Menter, alia as vantagens de cada um dos modelos previamente apresentados. Ou seja, a habilidade do $k - \epsilon$ em lidar com escoamentos a distância da parede e o tratamento adequado do $k - \omega$ para o tratamento próximo as paredes. Isto faz dele um modelo bastante adequado para aplicações gerais na simulação computacional de escoamentos.

Em termos de equações, Menter basicamente utilizou a equação diferencial para a energia cinética turbulenta oriunda do modelo $k - \omega$ e substituiu ϵ por $k\omega$ a

fim de obter uma nova equação diferencial para ω . Resumidamente são dadas pelas equações (4.101) e (4.102).

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \omega) \\ = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \nabla \omega \right) + \gamma_2 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_2 \rho \omega^2 \\ + 2 \frac{\rho}{\sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Novos coeficientes foram obtidos para o modelo, sendo eles listados na tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Coeficientes usuais para o modelo $k - \epsilon$ SST

Coeficiente	Valor
γ_2	0,44
σ_k	1,00
$\sigma_{\omega,1}$	2,00
$\sigma_{\omega,2}$	1,17
β_2	0,083
β^*	0,09

Sabendo que utilizar a abordagem do modelo $k - \epsilon$ para o cômputo das propriedades ao longe e do $k - \omega$ para o das propriedades próximas a parede, há, invariavelmente, transições bruscas entre as regiões o que requer funções que “relaxem” as propriedades. Um exemplo se dá tomando o termo C_1 do modelo $k - \epsilon$ e C_2 do modelo $k - \omega$, acarretando em:

$$C = C_1 F_c + (1 - F_c) C_2$$

Tal como ilustrado em Malalasekera (1995). F_c é um termo de relaxação que depenede tanto das escalas de comprimento quanto do número de Reynolds, sendo escolhida de modo que, de maneira suave, seu valor seja nulo na parede e tenda a unidade ao longe.

Além da questão das transições abruptas serem suavizadas a partir de estratégia parecida com a relaxação, Malalasekera (1995) destaca também a limitação da viscosidade induzida por vórtices a fim de garantir adequada solução em regiões com gradientes de pressão adversos, bem como limitação da taxa de produção da energia cinética turbulenta a fim de evitar acúmulo de turbulência em regiões estagnadas.

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, F_2 \sqrt{2 S_{ij} \cdot S_{ij}})}$$

$$P_k = \min \left(10 \beta^* \rho k \omega, 2 \mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right)$$

Dadas as características ótimas deste modelo de turbulência no tratamento completo de um escoamento, bem como o menor requisito computacional para a solução do problema dada a inclusão de poucas equações diferenciais ao problema, diferentemente do que ocorreria com a simulação do escoamento utilizando o modelo das tensões de Reynolds o qual inclui número muito maior de equações, este será o modelo utilizado para a simulação do escoamento no interior do bocal convergente-divergente.

5. METODOLOGIA

5.1. AVALIAÇÃO PRELIMINAR DO SISTEMA DE PROPULSÃO PARA O CASO UNIDIMENSIONAL

5.1.1. Determinação da pressão na câmara de combustão em função do tempo

Esta determinação se baseia na aplicação do balanço de massa ou equação da continuidade aplicada a um sistema de propulsão genérico dado pelo volume de controle da figura 5.1.

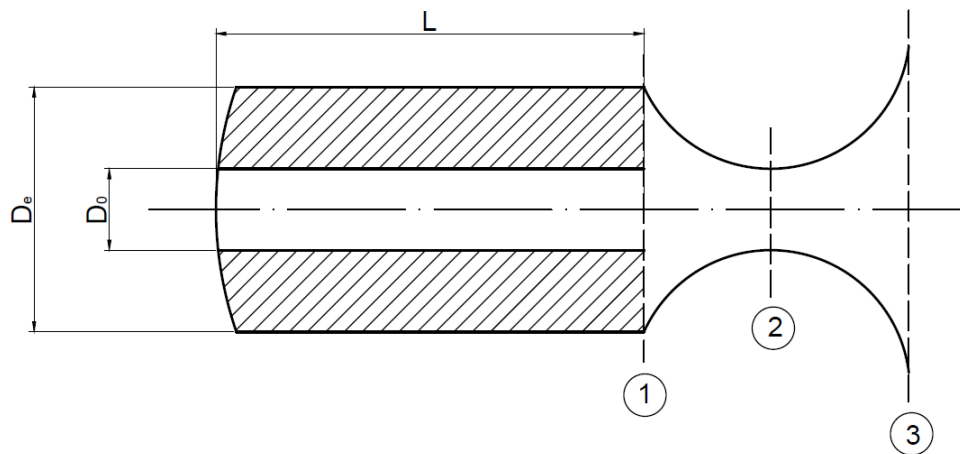


Figura 5.1 – Modelo simplificado de um sistema de propulsão de combustível sólido

Não há qualquer vazão mássica entrando no volume de controle, mas tão somente saindo, sendo esta última dada pela vazão mássica através do bocal. Por hipóteses simplificadoras, assume-se um bocal convergente-divergente com escoamento unidimensional de um gás perfeito, sem troca de calor ou trabalho de

eixo, com efeitos gravitacionais desprezíveis e efeitos cinéticos desprezíveis em relação a variação de entalpia. A vazão mássica neste, desde que operando bloqueado, é dada pela vazão mássica na garganta deste componente, assim:

$$\dot{m}_{sai} = \dot{m}_{bocal} = \rho_{garganta} V_{garganta} A_{garganta} \quad (5.1)$$

Desta forma, sendo o gás perfeito, segundo os índices da figura 5.x:

$$\dot{m}_{sai} = \frac{p_2}{RT_2} M_2 \sqrt{kRT_2} A_2 \quad (5.2)$$

Mas, do escoamento isentrópico de um fluido compressível tem-se que

$$p_0 = p_i \left(1 + \frac{k-1}{2} M_i^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$T_0 = T_i \left(1 + \frac{k-1}{2} M_i^2 \right)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - R}$$

Com o índice 0 representando o estado de estagnação e, i a propriedade estática. Neste caso, o estado de estagnação é dado pela própria pressão e temperatura no interior da câmara de combustão, ambos variáveis com o tempo. Estes estados de estagnação podem ser demonstrados aplicando a 1ª Lei da termodinâmica ao escoamento bem como a expressão da relação de pressões de estagnação para o processo isentrópico, tal como demonstrado em Zucker (1978). Fazendo as substituições na expressão da vazão mássica que sai do volume de controle:

$$\dot{m}_{sai} = p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (5.3)$$

A vazão mássica gerada é dada pela formação de gases de combustão a partir da queima do propelente sólido, podendo ser quantificada segundo a equação 5.4.

$$\dot{m}_{ger} = \rho_{comb} r A_{comb} = \rho_{comb} (a p_c^n) A_{comb} \quad (5.4)$$

Com ρ_{comb} a massa específica do combustível e A_{comb} a área de queima do propelente sólido, variável com o tempo segundo

$$A_{comb}(t) = 2\pi L \left(\frac{D_0}{2} + rt \right)$$

com D_0 o diâmetro inicial da cavidade interna, L o comprimento do grão propelente para o caso de um cilindro vazado, caso a ser analisado no presente texto. É notório que a área limite é dada pela carcaça da câmara de combustão, sendo a vazão mássica gerada nula quando este limite ocorrer, isto é, quando deixar de haver propelente a ser queimado não há mais geração de gases, mas tão somente o escoamento daquele que já ocupa o volume da câmara até que esta se esvazie.

Por fim é necessário avaliar a taxa de massa acumulada no volume de controle, sendo esta dada por:

$$\dot{m}_{ac} = \frac{d(\rho_g V_g)}{dt} = \rho_g \frac{dV_g}{dt} + V_g \frac{d\rho_g}{dt} \quad (5.5)$$

com V_g o volume ocupado pelos gases oriundos da combustão, variável conforme se processa o consumo do grão-propelente; e ρ_g a densidade dos gases produzidos no processo de combustão que, se supostos perfeitos:

$$\dot{m}_{ac} = \frac{p_c}{RT_c} \frac{dV_g}{dt} + \frac{V_g}{RT_c} \frac{dp_c}{dt} = \frac{p_c A_{comb}}{RT_c} a p_c^n + \frac{V_g}{RT_c} \frac{dp_c}{dt} \quad (5.6)$$

Assim, do balanço de massa:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{ac} &= \underbrace{\dot{m}_{ent}}_{=0} - \dot{m}_{sai} + \dot{m}_{ger} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p_c A_{comb}}{RT_c} a p_c^n + \frac{V_g}{RT_c} \frac{dp_c}{dt} &= -p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} + \rho_{comb} (a p_c^n) A_{comb} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dp_c}{dt} &= \frac{RT_c}{V_g} \left[a A_{comb} \left(\rho_{comb} - \frac{p_c}{RT_c} \right) p_c^n - p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \right] \end{aligned}$$

Que é uma equação diferencial ordinária não homogênea. Tal será implementada computacionalmente através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, havendo substituição da área de combustão pela relação que leva em conta uma geometria particular. Desta forma, pode-se dizer que esta é uma expressão simplificada geral para avaliação da pressão da câmara da combustão em função do tempo.

Nota-se que não foi levado em conta que o bocal está bloqueado, tendo em vista que esta condição depende da pressão no interior da câmara de combustão e da pressão externa. A cada instante da rotina de solução da equação diferencial tal condição será verificada, bem como a atualização de cada um dos parâmetros

variáveis com a pressão, no caso a temperatura no interior da câmara de combustão. Também serão atualizados a área de combustão e o volume no interior da câmara.

Em uma primeira aproximação, dadas as hipóteses já consideradas, será assumido que cada etapa de integração da equação diferencial será um processo quasi-estático, desta forma, a relação entre pressão e temperatura no interior da câmara de combustão será dada por:

$$T_{c_{i+1}} = \left(\frac{p_{c_{i+1}}}{p_{c_i}} \right)^{\frac{k-1}{k}} T_{c_i}$$

5.1.2. Determinação do empuxo num bocal unidimensional

A força de empuxo associada ao escoamento de gases de combustão baseia-se na conservação da quantidade de movimento. A expressão que possibilita seu computo, encontrada em Taylor (2009), Zucker (1978), Zucrow (19xx), Shapiro (19xx), Sutton (2001) dentre outras, e de fácil dedução é dada pela expressão (5.7).

$$F = \dot{m}V_3 + (p_3 - p_{receptor})A_3 \quad (5.7)$$

Com o índice 3 tal como apresentado na figura 5.1, desta forma, V_3 é a velocidade na seção de descarga do bocal, p_3 e $p_{receptor}$ as pressões na seção de descarga do bocal e do receptor (ambiente, no caso), respectivamente. \dot{m} é a vazão mássica no bocal. Esta expressão fornece meios quantitativos de estimar a força de empuxo fornecida por determinada configuração e tipo de propelente sólido, permitindo verificar se fornece a força necessária para decolagem e ascensão do artefato, no caso, do míssil balístico.

A velocidade na seção de descarga pode ser estimada a partir das hipótese já enunciadas na seção 5.1 para o escoamento no bocal, sendo esta dada por:

$$V_3 = M_3 \sqrt{kRT_3} = M_3 \sqrt{kR \frac{T_c}{1 + \frac{k-1}{2} M_3^2}} \quad (5.8)$$

Com o número de Mach na seção de descarga podendo ser determinado a partir da razão de áreas entre esta seção e a garganta, supostas como variáveis de projeto:

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{M_2}{M_3} \left[\frac{1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M_3^2}{1 + \left(\frac{k-1}{2}\right) M_2^2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Analogamente, a pressão na seção de descarga é dada por:

$$p_3 = \frac{p_c}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_3^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}$$

E a vazão mássica, da equação da continuidade, pode ser dada pela própria vazão na seção da garganta do bocal, conforme a equação 5.9:

$$\dot{m}_2 = p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \quad (5.9)$$

Assim, fazendo as substituições adequadas, a equação 5.7 pode ser escrita como:

$$F = kp_c M_2 M_3 A_2 \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_3^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} + \left(\frac{p_c}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}} - p_{receptor} \right) A_3 \quad (5.10)$$

O empuxo pode ser avaliado conforme o tempo de combustão segundo variação na pressão do interior da câmara de combustão, cuja equação diferencial que rege o fenômeno já fora deduzida na seção 5.1.

5.2. PROJETO BIDIMENSIONAL DE UM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE

5.2.1. Projeto da porção divergente pelo método das características

Para a aplicação do método das características para a determinação da geometria de um bocal divergente de mínimo comprimento utilizou-se uma solução numérica baseada no equacionamento proposto em Hodge (1995) e Anderson (2003), já exposto na seção 2.2 da revisão bibliográfica. Aqui será descrito em detalhes como se estruturou o programa.

5.2.1.1. Determinação dos valores de θ , v , K_+ , K_- , M e μ

Como ponto de partida para a determinação das propriedades de cada característica, isto é, os invariantes de Riemann positivo e negativo, ângulo do vetor velocidade em relação ao eixo das abscissas - aqui suposto horizontal – bem como o ângulo de Prandtl-Meyer, ângulo entre a característica e o vetor velocidade e

também o número de Mach, é necessário se dispor do número de Mach na seção de saída o que possibilita o cálculo do ângulo máximo da seção de expansão do bocal, segundo:

$$\theta_{max} = \frac{1}{2} v(M_{saída}) \quad (5.11)$$

Com:

$$v(M) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) \quad (5.12)$$

A figura 5.2 traz a dinâmica da nomenclatura dos pontos para os quais as propriedades serão calculadas. Note que em cada característica, a despeito do primeiro ponto comum a todas, cada uma possui a quantidade de pontos de interesse igual ao número de características mais um ($n + 1$). Também é de fácil percepção que, segundo a nomenclatura, todos os pontos são da forma $(i, j) = (j, i)$, fato este que foi utilizado para o cômputo das propriedades.

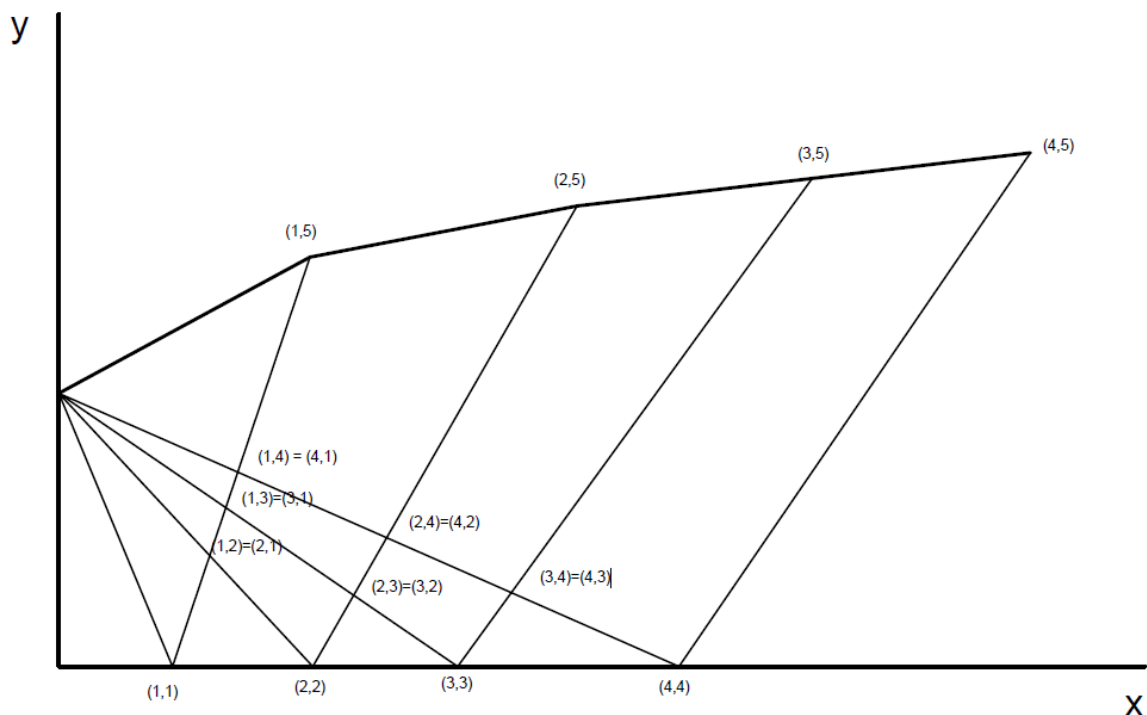


Figura 5.2 – Exemplo da geometria de um bocal divergente e de suas características

Ainda da figura 5.2 pode-se notar que os pontos da primeira característica dependem todos apenas do ângulo que o vetor velocidade faz com o eixo das abscissas do sistema de referência. Nota-se que a primeira linha na realidade é aquela perpendicular à parede da garganta na qual o número de Mach é unitário. Utilizá-la como característica não seria de grande ajuda tendo em vista que sua reflexão com a linha de centro, suposta uma parede com vetores velocidades paralelos ao escoamento, a levaria ao mesmo ponto, e não a parede externa do bocal. Desta forma, a primeira característica a ser considerada possui vetor velocidade com ângulo $\theta_{inicial}$ tão pequeno quanto se queira, sendo cada outra característica a seguir com tal ângulo calculado a partir deste mais uma variação dada por:

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{max} - \theta_{inicial}}{n - 1} \quad (5.13)$$

Desta forma, os primeiros pontos tem como valores dos ângulos característicos e constantes de Riemman dados por:

$$\theta_{1,j} = \theta_{inicial} + (j - 1)\Delta\theta \quad (5.14)$$

$$v_{1,j} = \theta_{1,j} \quad (5.15)$$

$$k_{-1,j} = \theta_{1,j} + v_{1,j} \quad (5.16)$$

$$k_{+1,j} = \theta_{1,j} - v_{1,j} \quad (5.17)$$

Conforme já descrito, tem-se que $(i, j) = (j, i)$ para cada ponto de encontro das linhas características. Portanto, o primeiro ponto de cada uma das demais características, à exceção do mais externo, é dado por:

$$\theta_{j,1} = \theta_{1,j} \quad (5.18)$$

$$v_{j,1} = v_{1,j} \quad (5.19)$$

$$k_{-j,1} = k_{-1,j} \quad (5.20)$$

$$k_{+j,1} = k_{+1,j} \quad (5.21)$$

Os pontos que tocam a linha de centro tem índices da forma (i, i) . Nota-se que, conforme já definido, a linha de centro será tratada como uma parede com os vetores velocidades paralelos a ela, isto é, há uma linha de corrente paralela a tal eixo, desta forma

$$\theta_{i,i} = \theta_{\text{linha de centro}} = 0$$

Da análise da figura 5.1 tem-se também que tais pontos tem o mesmo invariante de Riemann negativo que os pontos de índice $(i, i - 1)$, o que possibilita facilmente o cálculo dos demais ângulos e invariantes que restam:

$$\begin{aligned} K_{-i,i} = K_{-i,i-1} &= \underbrace{\theta_{\text{linha de centro}}}_{=0} + v_{i,i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{v_{i,i} = K_{-i,i-1}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Acarretando em:

$$\boxed{K_{+i,i} = \theta_{i,i} - v_{i,i}} \quad (5.23)$$

Findados os cálculos destes valores para estes primeiros pontos de intersecção entre as características, passa a ser necessário tais cálculos para os pontos internos. É fácil notar que cada um destes pontos goza dos mesmos invariantes de Riemann positivos e negativos que os pontos $(i, j - 1)$ e $(i, j - 2)$, respectivamente. Entretanto há uma dificuldade na implantação usando esta notação de pontos tendo em vista que o ponto $(3,2)$, por exemplo, não tem como acessar o $(3,0)$, devendo se valer dos pontos $(3,1)$ e $(2,2)$. Ou seja, pontos de índice da forma (i, j) com $i > j$ devem seguir condição diferente daqueles com $j > i$. Desta forma uma condição adicional é necessária para o cálculo dos valores associados

a tais pontos. As equações a seguir listadas fornecem, junto com a condição o método proposto para o cálculo.

Se (i, j) com $i > j$

$$k_{-i,j} = k_{-i,j-1} \quad (5.24)$$

$$k_{+i,j} = k_{+i-1,j} \quad (5.25)$$

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{2}(k_{-i,j} + k_{+i,j}) \quad (5.26)$$

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}(k_{-i,j} - k_{+i,j}) \quad (5.27)$$

Se (i, j) com $i < j$

$$k_{-i,j} = k_{-i,j-2} \quad (5.28)$$

$$k_{+i,j} = k_{+i,j-1} \quad (5.29)$$

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{2}(k_{-i,j} + k_{+i,j}) \quad (5.30)$$

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}(k_{-i,j} - k_{+i,j}) \quad (5.31)$$

Por fim, os últimos pontos, aqueles que também farão parte da parede externa do bocal gozam dos mesmos valores que os seus anteriores da mesma característica, desta forma:

$$k_{-i,n+1} = k_{-i,n} \quad (5.32)$$

$$k_{+i,n+1} = k_{+i,n} \quad (5.33)$$

$$\theta_{i,n+1} = \frac{1}{2}(k_{-i,n+1} + k_{+i,n+1}) \quad (5.34)$$

$$v_{i,n+1} = \frac{1}{2}(k_{-i,n+1} - k_{+i,n+1}) \quad (5.35)$$

Como agora se tem posse de todos os valores dos invariantes de Riemann, ângulos em relação ao eixo horizontal do sistema de coordenadas e dos ângulos de

Prandtl-Meyer, é trivial calcular o número de Mach e o ângulo da linha característica em relação ao vetor velocidade. Sabe-se que $v = f(M, k)$ de maneira implícita, desta forma é possível através do método de Newton-Raphson (Humes, 1984) determinar o número de Mach dado o ângulo de Prandtl-Meyer segundo:

$$M_{i,j,novo} = M_{i,j,anterior} - \frac{f(M_{ant})}{f'(M_{ant})} \quad (5.36)$$

Com

$$f(M_{ant}) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sqrt{M_{i,j,ant}^2 - 1} \right) - \arctg \left(\sqrt{M_{i,j,ant}^2 - 1} \right) - v_{i,j}(M_{i,j,ant}) \quad (5.37)$$

E

$$f'(M_{ant}) = \frac{M_{i,j,ant}}{\sqrt{M_{i,j,ant}^2 - 1} \left[1 + \frac{k-1}{k+1} (M_{i,j,ant}^2 - 1) \right]} \quad (5.38)$$

É preciso notar que a cada iteração o número de Mach anterior é comparado ao atual até o ponto em que eles sejam tão próximos quanto se deseja segundo a precisão adotada. Até este instante, para cada iteração o valor de Mach anterior passa a ser o valor do Mach atual da iteração anterior. Também é importante ressaltar o valor inicial dos números de Mach assumidos. No caso dos primeiros pontos da malha, o número de Mach esperado é próximo a unidade, desta forma o primeiro teste é feito com este. Todos os demais pontos tem como primeiro número de Mach aquele calculado para o ponto de intersecção de índice $(i, j - 1)$. Nos testes realizados sempre houve convergência para valores julgados consistentes com os apresentados em Anderson (2003) e Hodge (1995) para casos análogos.

Finalmente o valor do ângulo entre a característica e o vetor velocidade de cada linha de corrente existente pode ser calculado segundo:

$$\mu_{i,j} = \arcsen\left(\frac{1}{M_{i,j}}\right) \quad (5.39)$$

5.2.1.2. Determinação das coordenadas de cada ponto de intersecção

Conforme exposto por Hodge (1995), o método das características é de sobremodo interessante por permitir a reconstrução das linhas de Mach a partir dos pontos de encontro das linhas características (linhas de Mach) e assim determinar o perfil da seção do bocal sem saber, a princípio a localização de nenhum ponto da malha a exceção daquele do qual as características partem. Tal ponto é caracterizado por ser aquele de junção entre a porção divergente e convergente do bocal, sendo sua posição definida segundo $x_{1,1} = 0$ e $y_{1,1} = D_{garganta}/2$. Tal ponto é o inicial de cada uma das demais linhas características, desta forma:

$$x_{i,1} = 0 \text{ e } y_{i,1} = \frac{D_{garganta}}{2}.$$

Os pontos de intersecção com a linha de centro podem ser determinados a partir da posição de um único ponto anterior e assumindo que $y_{i,i} = 0$. Note que como se começou de um ponto (1,1) para o qual não se havia calculado nenhum dos parâmetros da seção 5.2.1.1, cada ponto (i,j) tem os valores utilizados de $(i,j - 1)$, o seu ponto real segundo a figura 5.2.

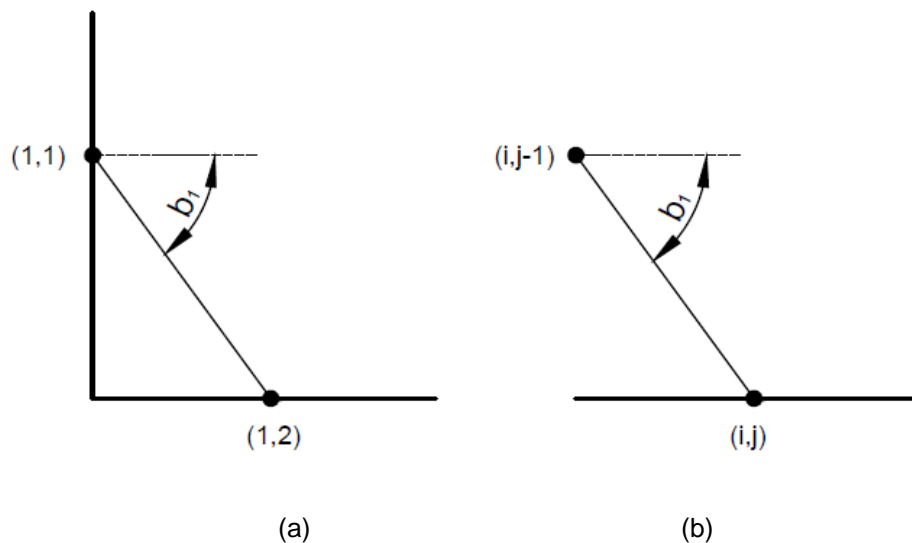


Figura 5.3 – Pontos de intersecção com a linha de centro

Para o caso (a) da figura 5.3, tem-se que o ponto (1,2) é aquele no qual a característica 1 intercepta a linha de centro e reflete, sendo este definido por:

$$\begin{aligned} \underbrace{y(1,2)}_{=0} &= \underbrace{y(1,1)}_{\frac{D_{garganta}}{2}} + b_1 \left(x(1,2) - \underbrace{x(1,1)}_{=0} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x(1,2) = \frac{-D_{garganta}}{b_1}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Com

$$\boxed{b_1 = tg(\theta_{1,1} - \mu_{1,1})} \quad (5.41)$$

Para os demais pontos de intersecção com a linha central, tal como a figura 5.3.b:

$$\begin{aligned} \underbrace{y(i,j)}_{=0} &= y(i,j-1) + b_1(x(i,j) - x(i,j-1)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x(i,j) = -\frac{y(i,j-1)}{b_1} + x(i,j-1)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Com

$$\boxed{b_1 = tg \left[\frac{1}{2} \left(\underbrace{\theta_{i,j-1}}_{=\theta_{parede}} + \theta_{i,j} - \mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} \right) \right]} \quad (5.43)$$

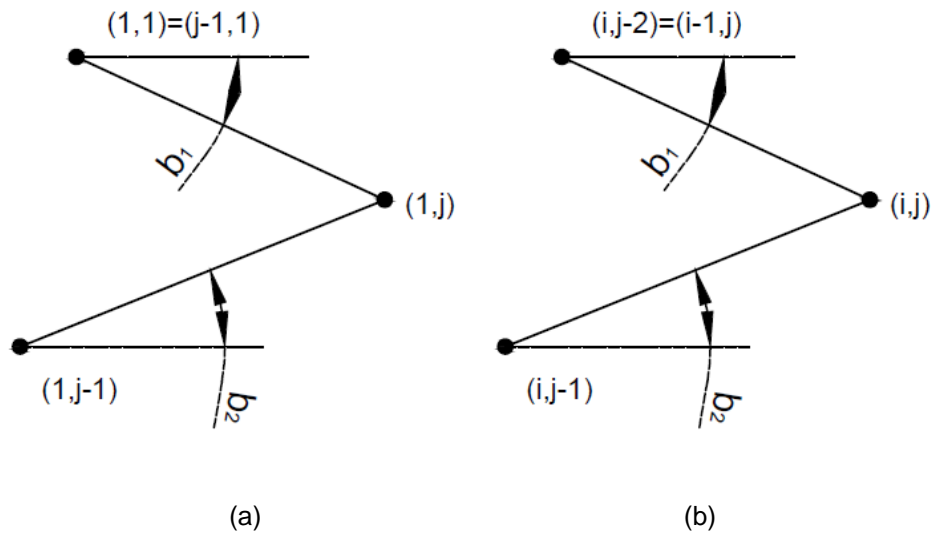


Figura 5.4 – Determinação da posição dos pontos internos da malha interior ao bocal

Os pontos internos da malha que estão na primeira linha característica podem ser calculados segundo:

$$y(1,j) = y(j-1,1) + b_1(x(1,j) - x(j-1,1)) \quad (5.44)$$

$$y(1,j) = y(1,j-1) + b_2(x(1,j) - x(1,j-1)) \quad (5.45)$$

Subtraindo as equações (5.45) de (5.44) e isolando $x(1,j)$:

$$x(1,j) = \frac{y(j-1,1) - y(1,j-1) + b_2x(1,j-1) - b_1x(j-1,1)}{b_2 - b_1} \quad (5.46)$$

Tendo os coeficientes angulares definidos, segundo a convenção da figura 5.2:

$$b_1 = \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (\theta_{i,j-1} + \theta_{i-1,j-1} - \mu_{i,j-1} - \mu_{i-1,j-1}) \right] \quad (5.47)$$

$$b_1 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{i,j-1} + \theta_{i,j-2} + \mu_{i,j-1} + \mu_{i,j-2}) \right] \quad (5.48)$$

E $y(1,j)$ definido por uma das equações (5.44) ou (5.45)

Para os demais pontos da malha, à exceção daqueles que encontram a parede do bocal, o cálculo é feito segundo a figura 5.4.b. A equação de cada uma das retas que liga o ponto anterior ao ponto a ser determinado é dada por:

$$y(i,j) = y(i-1,j) + b_1(x(i,j) - x(i-1,j)) \quad (5.49)$$

$$y(i,j) = y(i,j-1) + b_2(x(i,j) - x(i,j-1)) \quad (5.50)$$

Subtraindo as equações (5.49) de (5.50) e isolando $x(1,j)$:

$$x(i,j) = \frac{y(i-1,j) - y(i,j-1) + b_2x(i,j-1) - b_1x(i-1,j)}{b_2 - b_1} \quad (5.51)$$

Tendo os coeficientes angulares definidos, segundo a convenção da figura 5.2

$$b_1 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{1,j-1} + \theta_{j-1,1} - \mu_{1,j-1} - \mu_{j-1,1}) \right] \quad (5.52)$$

$$b_1 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{1,j-1} + \theta_{1,j-2} + \mu_{1,j-1} + \mu_{1,j-2}) \right] \quad (5.53)$$

E $y(1,j)$ definido por uma das equações (5.49) ou (5.50).

5.2.1.3. Determinação dos pontos de intersecção entre as linhas características e a parede do bocal

Por fim, a fim de possibilitar a delimitação da parede do bocal, é necessário determinar os pontos nos quais as linhas características interceptam este. Anderson (2003) propõe que a reta que conecta dois destes tais pontos consecutivos tem inclinação dada pela média aritmética entre cada um dos ângulos dos pontos notáveis em questão em relação ao vetor velocidade assumindo que, como condição de contorno, estes vetores sejam tangentes a ela em cada ponto. Isto é, há uma linha de corrente que tem o mesmo formato que a parede, o que é razoável lembrando que o escoamento é potencial neste caso analisado, conforme já discutido na seção 2.2.

A figura 5.5 ilustra os dois casos a serem analisados no presente momento. A figura (a) diz respeito a intersecção entre a primeira característica e a linha de contorno da parede do bocal. Já a figura (b) ilustra quaisquer outras linhas em características interceptando o contorno do bocal.

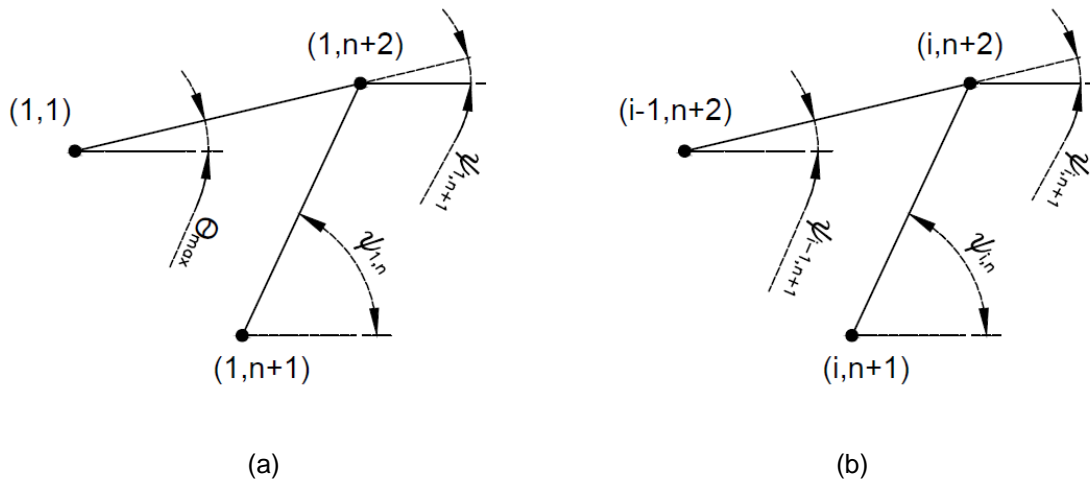


Figura 5.5 – Determinação das coordenadas dos pontos de intersecção entre a parede do bocal e as linhas características

A análise inicia-se pelo caso (a) da figura 5.5. Sejam as duas retas ligando os pontos assinalados

$$y(1, n + 2) = y(1,1) + b_1(x(1, n + 2) - x(1,1)) \quad (5.54)$$

$$y(1, n + 2) = y(i, n + 1) + b_2(x(1, n + 2) - x(1, n + 1)) \quad (5.55)$$

Subtraindo as equações (5.54) de (5.55) e isolando $x(1, j)$:

$$x(1, n + 2) = \frac{y(1,1) - y(1, n + 1) + b_2x(1, n + 1) - b_1x(1,1)}{b_2 - b_1} \quad (5.56)$$

Tendo os coeficientes angulares definidos, segundo a convenção da figura 5.2:

$$b_1 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{max} + \theta_{1,n+1}) \right] \quad (5.57)$$

$$b_1 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{1,n+1} + \theta_{1,n} + \mu_{1,n+1} + \mu_{1,n}) \right] \quad (5.58)$$

E $y(1, n + 2)$ definido por uma das equações (5.55) ou (5.54). Estes valores são os mesmos que o segundo ponto da parede do bocal, dada por:

$$z_x(1) = x(1,1) \text{ e } z_y(1) = y(1,1)$$

$$z_x(2) = x(1, n + 2) \text{ e } z_y(2) = y(1, n + 2)$$

Com a reta que os liga dada por:

$$z_y(2) = z_y(1) + b_1(z_x(2) - z_x(1)) \quad (5.59)$$

Com b_1 calculado.

Generalizando para o caso (b) dos demais pontos de encontros das linhas características com o bocal:

$$y(i, n + 2) = y(i - 1, n + 2) + b_1(x(i, n + 2) - x(i - 1, n + 2)) \quad (5.60)$$

$$y(i, n + 2) = y(i, n + 1) + b_2(x(i, n + 2) - x(i, n + 1)) \quad (5.61)$$

Subtraindo as equações (5.60) de (5.61) e isolando $x(1, j)$:

$$x(1, n + 2) = \frac{y(i - 1, n + 2) - y(i, n + 1) + b_2x(i, n + 1) - b_1x(i - 1, n + 2)}{b_2 - b_1} \quad (5.62)$$

Tendo os coeficientes angulares definidos, segundo a convenção da figura 5.2

$$b_1 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{i-1, n+1} + \theta_{i, n+1}) \right] \quad (5.63)$$

$$b_2 = tg \left[\frac{1}{2} (\theta_{i, n+1} + \theta_{i, n} + \mu_{i, n+1} + \mu_{i, n}) \right] \quad (5.64)$$

E $y(i, n + 2)$ definido por uma das equações (5.60) ou (5.61). Estes valores são os mesmos que o segundo ponto da parede do bocal, dada por:

$$z_x(i + 1) = x(i, n + 2) \text{ e } z_y(i + 1) = y(i, n + 2)$$

Com a reta que os liga dada por:

$$z_y(i + 1) = z_y(i) + b_1(z_x(i + 1) - z_x(i)) \quad (5.65)$$

Com b_1 calculado.

Com todas as posições calculadas é possível traçar toda a malha interior do bocal bem como sua parede externa, o que garante a obtenção da seção de descarga e comprimentos ideais para este bocal ter na seção de saída o número de Mach desejado com menor gasto possível de material e menor massa.

5.3. DESENVOLVIMENTO DA SOLUÇÃO TRANSIENTE PARA UM BOCAL QUASE-UNIDIMENSIONAL

Com o escopo de fornecer um método para o cálculo do esvaziamento da câmara de combustão com a queima do combustível e escoamento do gás produzido durante a combustão será apresentado um modelo isentrópico de bocal quase-unidimensional com captura do regime transiente tal como apresentado em Anderson (1995). A principal preocupação em representar adequadamente a dinâmica da câmara de combustão reside no fato de a pressão interna ser de fundamental importância no dimensionamento das paredes do vaso no qual estará contido o combustível, como também na determinação do empuxo máximo. Vale ressaltar, conforme verificado na seção 5.1, que a pressão no interior dessa varia de acordo com o processo de degradação do combustível, e este, por sua vez, está atrelado a esta dado que a taxa de queima (\dot{r}) é diretamente proporcional a pressão da câmara.

5.3.1. Desenvolvimento das equações adimensionalizadas

Na seção 4.4 foram obtidas as equações diferenciais gerais na forma não-conservativa, isto é, em termos de derivadas substanciais e convectivas, para o caso de um bocal convergente-divergente supersônico em termos das propriedades físicas do escoamento, suposto isentrópico e o gás modelado como ideal.

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} = 0 \quad (4.66)$$

$$p \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.71)$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho V c_v \frac{\partial T}{\partial x} = -p \frac{\partial V}{\partial x} - pV \frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \quad (4.78)$$

Seja T_c a temperatura na câmara de combustão, p_c a pressão na câmara de combustão e $\rho_c = p_c/RT_c$ a densidade do gás no interior desta, L o comprimento do bocal e $c_c = \sqrt{kRT_c}$ a velocidade do fluido associada a câmara de combustão. A partir destes é possível introduzir os adimensionais para área da seção transversal, posição, temperatura e densidade do fluido ao longo do escoamento tal como feito por Anderson (1995):

$$t' = \frac{t}{L/c_c} \quad (5.66)$$

$$A' = \frac{A}{A^*} \quad (A^* \text{ é a área da garganta}) \quad (5.67)$$

$$T' = \frac{T}{T_c} \quad (5.68)$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (5.69)$$

$$V' = \frac{V}{c_c} \quad (5.70)$$

$$x' = \frac{x}{L} \quad (5.71)$$

A facilidade introduzida pelos adimensionais está no fato de generalizar as equações para quaisquer valores de comprimento e condições no interior da câmara de combustão. De posse dos adimensionais substituindo-os nas equações que regem o fenômeno do escoamento (continuidade, quantidade de movimento e energia), tem-se:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -\rho' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \rho' V' \frac{\partial(\ln A')}{\partial x'} - V' \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial V'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{1}{k} \left(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T'}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \right) \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = -V' \frac{\partial T'}{\partial x'} - (1 - k)T' \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} + V' \frac{\partial (\ln A')}{\partial x'} \right) \quad (5.74)$$

5.3.2. Aplicação do método de diferenças finitas

Conforme exposto em Anderson (1995) a solução para o presente problema pode ser obtida a partir do uso do método de MacCormack para a solução de equações diferenciais parciais de malhas fluídas. À rigor, este é provavelmente o método mais simples e de mais fácil implementação, entretanto leva a resultados bastante fidedignos.

Sua essência baseia-se na ideia do uso de passos de estimação dos parâmetros e correção dos mesmos ou seja, é, naturalmente, um predictor-corrector. Desta sua característica, alternando entre os passos de estimação e correção diferenças finitas progressivas e retrógradadas, este captura o fenômeno com erros de 2ª ordem.

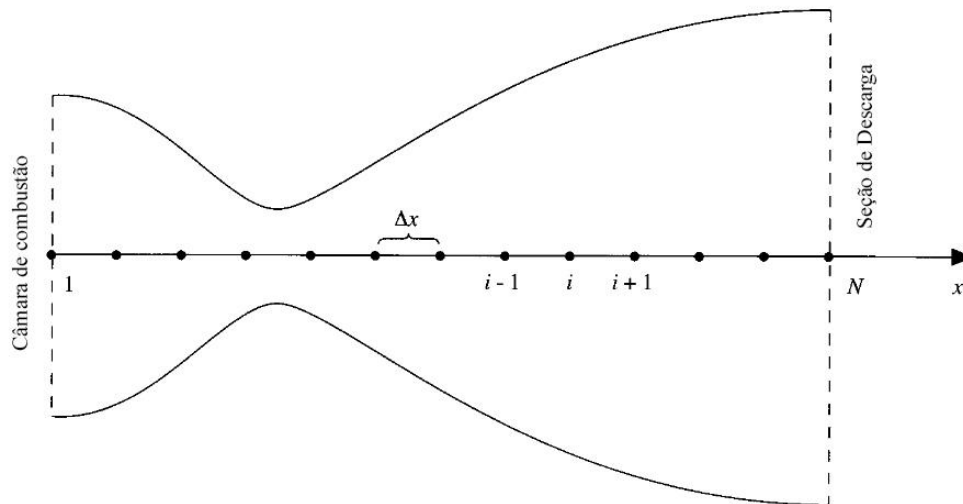


Figura 5.6 – Discretização linear do bocal convergente-divergente

No caso em questão, buscou-se estimar as variações no instante $(t + \Delta t)$ a partir dos valores calculados para o instante t , tendo em vista o caráter quase-unidimensional do fenómeno em análise. Para a estimativa dos valores da variação temporal das propriedades enunciadas pelas equações (5.72) a (5.74) no instante t para o i -ésimo nó da malha, utilizaram-se diferenças finitas progressivas em todos os nós a exceção do último, tendo em vista que não há elementos além deste, necessitando, pois, valer-se de diferença retrógrada. Para a etapa de estimação:

$$\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'}\right)_i^t = -\rho'_i \frac{V'_{i+1}^t - V'_i{}^t}{\Delta x'} - \rho'_i V'_i{}^t \frac{\ln(A'_{i+1}{}^t) - \ln(A'_i{}^t)}{\Delta x'} - V'_i{}^t \frac{\rho'_{i+1}{}^t - \rho'_i{}^t}{\Delta x'} \quad (5.75)$$

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial t'}\right)_i^t = -V'_i{}^t \frac{V'_{i+1}{}^t - V'_i{}^t}{\Delta x'} - \frac{1}{k} \left(\frac{T'_{i+1}{}^t - T'_i{}^t}{\Delta x'} + \frac{T'_i{}^t \rho'_{i+1}{}^t - \rho'_i{}^t}{\rho'_i{}^t \Delta x'} \right) \quad (5.76)$$

$$\left(\frac{\partial T'}{\partial t'}\right)_i^t = -V'_i{}^t \frac{T'_{i+1}{}^t - T'_i{}^t}{\Delta x'} - (1-k) T'_i{}^t \left(\frac{V'_{i+1}{}^t - V'_i{}^t}{\Delta x'} + V'_i{}^t \frac{\ln(A'_{i+1}{}^t) - \ln(A'_i{}^t)}{\Delta x'} \right) \quad (5.77)$$

Com estas é possível estimar o valor das propriedades adimensionalizadas no instante $t + \Delta t$. Estas, assim como em Anderson (1995) serão assinaladas com uma barra horizontal acima da varável:

$$\bar{\rho}'_i^{(t+\Delta t)} = \rho'_i{}^t + \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'}\right)_i^t \Delta t \quad (5.78)$$

$$\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} = V'_i{}^t + \left(\frac{\partial V'}{\partial t'}\right)_i^t \Delta t \quad (5.79)$$

$$\bar{T}'_i^{(t+\Delta t)} = T'_i{}^t + \left(\frac{\partial T'}{\partial t'}\right)_i^t \Delta t \quad (5.80)$$

Com estes valores estimados é possível obter uma estimativa para a variação das propriedades com o tempo no instante $(t + \Delta t)$. Agora, a fim de garantir a obtenção dos parâmetros com erros de 2ª ordem serão utilizadas diferenças retrógradadas a exceção do nó inicial que não possui qualquer outra opção que não

seja diferença progressivo. Este fato somado a unicidade de diferenças retrógradadas para o último nó fluido de fato acarretam em desvios numéricos em relação aos valores esperados. Em termos de propriedades nestes dois pontos, afirma-se que não haverá grande comprometimento tendo em vista que são fronteiras da malha fluída, locais este que serão ajustados segundo as condições de contorno adequadas. Os valores das taxas de variação temporais estimadas são dados pelas equações (5.81) a (5.82).

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t'}\right)_i^{(t+\Delta t)} = -\bar{\rho}'_i^{(t+\Delta t)} \frac{\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{V}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\Delta x'} - \bar{\rho}'_i^{(t+\Delta t)} \bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} \frac{\ln(A'_i^{(t+\Delta t)}) - \ln(A'_{i-1}^{(t+\Delta t)})}{\Delta x'} + \quad (5.81)$$

$$-\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} \frac{\bar{\rho}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{\rho}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\Delta x'}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{V}'}{\partial t'}\right)_i^{(t+\Delta t)} = -\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} \frac{\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{V}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\Delta x'} + \quad (5.82)$$

$$-\frac{1}{k} \left(\frac{\bar{T}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{T}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\Delta x'} + \frac{\bar{T}'_i^{(t+\Delta t)} \bar{\rho}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{\rho}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\bar{\rho}'_i^{(t+\Delta t)} \Delta x'} \right)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}'}{\partial t'}\right)_i^{(t+\Delta t)} = -\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} \frac{\bar{T}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{T}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\Delta x'} \quad (5.83)$$

$$- (1-k) \bar{T}'_i^{(t+\Delta t)} \left(\frac{\bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} - \bar{V}'_{i-1}^{(t+\Delta t)}}{\Delta x'} + \bar{V}'_i^{(t+\Delta t)} \frac{\ln(A'_i^{(t+\Delta t)}) - \ln(A'_{i-1}^{(t+\Delta t)})}{\Delta x'} \right)$$

Com estas derivadas temporais e de posse das equações (5.75) a (5.77), toma-se a média das taxas de variação temporal das propriedades a fim de se obter uma taxa de variação temporal média das propriedades, esta sim usada na correção do valor da propriedade no i-ésimo ponto para o instante $t + \Delta t$.

$$\overline{\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'}\right)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'}\right)_i^t + \left(\frac{\partial \bar{\rho}'}{\partial t'}\right)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (5.84)$$

$$\overline{\left(\frac{\partial V'}{\partial t'}\right)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial t'}\right)_i^t + \left(\frac{\partial \bar{V}'}{\partial t'}\right)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (5.85)$$

$$\overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial t'}\right)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T'}{\partial t'}\right)_i^t + \left(\frac{\partial \bar{T}'}{\partial t'}\right)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (5.86)$$

E assim, finalmente tem-se as propriedades adimensionalizadas no instante $(t + \Delta t)$:

$$\rho'_i(t+\Delta t) = \rho'_i{}^t + \overline{\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t'}\right)} \Delta t \quad (5.87)$$

$$V'_i(t+\Delta t) = V'_i{}^t + \overline{\left(\frac{\partial V'}{\partial t'}\right)} \Delta t \quad (5.88)$$

$$T'_i(t+\Delta t) = T'_i{}^t + \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial t'}\right)} \Delta t \quad (5.89)$$

A condição de parada adotada para a confecção de um código para simulação computacional foi o instante no qual a diferença em módulo entre os instantes atual e anterior de todas as propriedades em todos os pontos da malha fosse tão pequena quanto se queira.

$$|V'_i{}^{t+\Delta t} - V'_i{}^t| < \delta$$

$$|\rho'_i{}^{t+\Delta t} - \rho'_i{}^t| < \delta$$

$$|T'_i{}^{t+\Delta t} - T'_i{}^t| < \delta$$

Ainda antes da implementação computacional do método para a solução do escoamento é necessário apresentar condições de contorno e iniciais a serem impostas para que haja satisfação da condição física em análise. Iniciar-se-á as discussões pelas condições iniciais. Anderson (1995) deixa bem claro que quaisquer as condições impostas inicialmente haverá convergência do programa, entretanto, como se deseja chegar ao regime permanente, quanto melhor a estimativa das condições iniciais para este menor o recurso computacional e tempo para a solução. Ainda há questão das grandes variações no transiente que podem acarretar em erros numéricos a serem propagados. A experiência obtida pelo autor do relatório na simulação de seu caso em estudo mostra que, na verdade, a possibilidade de estimativas erradas numéricas são grandes quando não há reflexão acerca das condições de contorno. Isto ficou claro em uma simulação de outra geometria de bocal com as mesmas condições de início impostas no caso apresentado por Anderson (1995). Para este a densidade adimensional calculada ficou negativa

induzindo na divergência da solução a partir de valores não adequados, ou melhor, valores que não estão na reta real, mas sim no plano complexo.

Uma metodologia adequada para estimação dos parâmetros consiste em cálculos simples obtidos a partir da teoria mais básica de escoamento compressível. Notou-se que é adequado aproximar as propriedades densidade e temperatura com uma função linear decrescente desde a face de admissão até a de descarga, calculando o valor nesta última a partir do número de Mach de projeto:

$$T'_{ini} = 1 - \frac{\frac{T_c}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{saída}^2\right)}}{T_c} x$$

E,

$$\rho'_{ini} = 1 - \frac{\frac{p_c}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{saída}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{saída}^2\right)}{RT_c}}{p_c/RT_c} x$$

Já a velocidade adimensional pode ser estimada da mesma maneira, mas a partir da velocidade na seção de descarga do bocal:

$$V'_{ini} = 1 - \frac{M_{saída} \sqrt{kR \frac{T_c}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{saída}^2\right)}}}{\sqrt{kRT_c}} x$$

Anderson (1995) também traz uma abordagem muito interessante no que toca as condições de contorno a partir da utilização de conceitos do método das características, já abordado na seção 4.2. Conforme já apresentado, as linhas características nada mais são do que ondas de Mach de pequena magnitude que se propagam com velocidade sônica local, deslocando-se sempre a montante e a jusante do escoamento. Conforme já visto há sempre um par destas, uma que se move à direita e outra à esquerda. A figura 5.7 ilustra a situação a ser analisada.

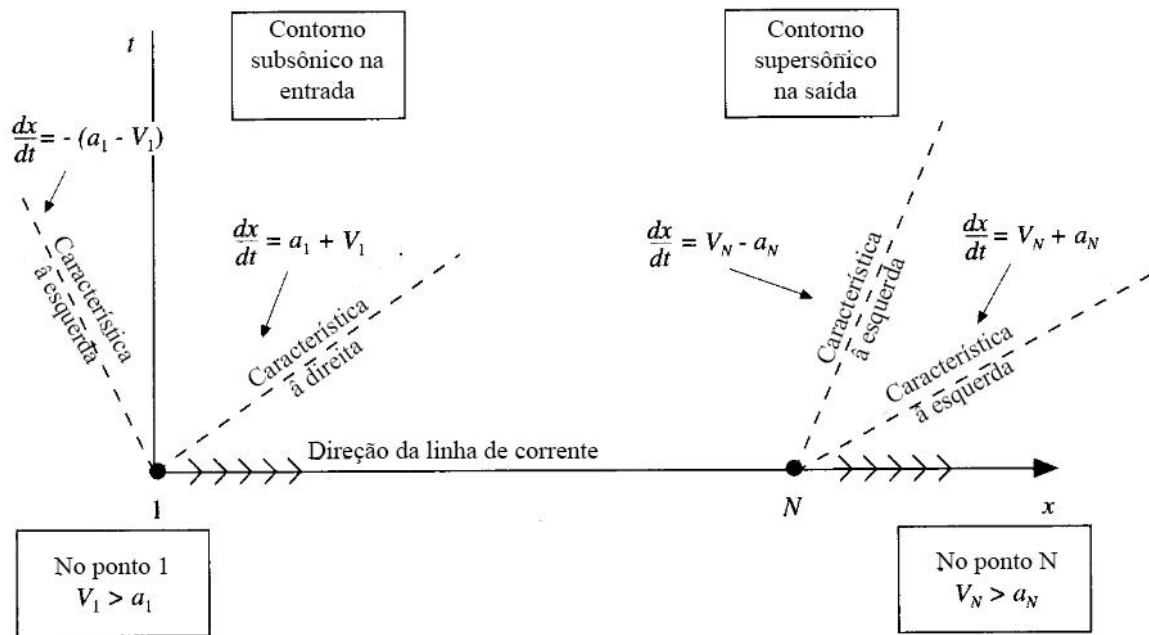


Figura 5.7 – Entrada e saída do bocal

Como a velocidade da característica é maior do que aquela local do escoamento na seção de admissão, isto porque nesta a velocidade é extremamente baixa, tem-se que a característica esquerda sai do domínio fluido em análise adentrando ao reservatório, no caso, câmara de combustão. Já a característica que segue a direita nesta seção adentra ao domínio analisado. Algo diferente acontece na seção de descarga. Nesta, ambas as linhas características se deslocam com velocidade menor do que aquela atingida na seção. Ora, isto é óbvio de se notar já que o projeto do bocal é feito para que a velocidade do escoamento local seja maior do que a velocidade sônica no loco. Com isto, dada a composição de movimentos dos vetores velocidade, ambas as características são “arrastadas” para fora do domínio fluido.

Segundo Anderson (1995), da teoria do método das características, se uma das linhas sai do domínio fluido, tem-se que há a necessidade de uma propriedade do ponto em que esta parte ser flutuante. Isto ocorre com ambas as linhas na seção de descarga, acarretando na necessidade de deixar todas as propriedades nesta variarem. Isto pode ser feito a partir da utilização de parâmetros obtidos em pontos adjacentes ou próximos no escoamento. Também nota-se que na seção de admissão somente uma das características deixa o domínio fluido, desta forma

somente uma propriedade, no caso adotado a velocidade adimensional, irá variar, sendo a densidade e temperaturas, por facilidade, definidas.

A variação das propriedades pode ser feita de maneira linear levando em conta os nós mais próximos subsequentes (seção de admissão) ou anteriores (seção de descarga). Para o caso da velocidade, por exemplo, estipula-se, por hipótese que haverá aumento linear desta entre os nós (i-2), (i-1) e i. Como não se sabe ao certo o valor da velocidade em i, mas sim os de (i-2) e (i-1) bem como a distância entre estes, uma estimativa do coeficiente angular da reta pode ser obtida:

$$\alpha = \frac{V'_{i-1} - V'_{i-2}}{\Delta x'}$$

Da hipótese de que o ponto i está sobre a mesma reta, tem-se que, para uma distância $\Delta x'$ entre os pontos (i-1) e (i):

$$V'_i = V'_{i-1} + \frac{V'_{i-1} - V'_{i-2}}{\Delta x'} \Delta x' \Rightarrow \boxed{V'_i = 2V'_{i-1} - V'_{i-2}}$$

O mesmo vale para as demais propriedades na seção de descarga. Analogamente, para a velocidade na seção de entrada:

$$\boxed{V'_1 = 2V'_2 - V'_3}$$

A tabela 5.1 lista todas as condições de contornos utilizadas na confecção do programa de simulação computacional.

Tabela 5.1 – Condições de contorno para análise quase-unidimensional de um bocal convergente-divergente supersônico

Seção	Propriedade	Condição de contorno
Entrada	T'	1
	V'	$V'_1 = 2V'_2 - V'_3$
	ρ'	1
Saída	T'	$T'_i = 2T'_{i-1} - T'_{i-2}$
	V'	$V'_i = 2V'_{i-1} - V'_{i-2}$
	ρ'	$\rho'_i = 2\rho'_{i-1} - \rho'_{i-2}$

Na entrada, a temperatura e densidade adimensionais tem como condição de contorno 1 pois são adimensionalizadas segundo os parâmetros da câmara de combustão, isto é, a temperatura é idêntica a temperatura da câmara bem como a pressão.

Resta para finalizar a apresentação da metodologia para a avaliação de um bocal quase-unidimensional supersônico verificar quando devem ser impostas as condições de contorno. Após testes realizados no código apresentado no apêndice A, verificou-se que, além de impor tais condições para a situação inicial, também é necessário impô-las a cada um dos passos de temperatura, tanto para as propriedades adimensionalizadas falsas, como também para as verdadeiras obtidas ao final. Caso não aplicadas na etapa de estimação das propriedades “falsas”, verificaram-se discrepâncias numéricas acentuadas na comparação do caso resolvido por Anderson (1995).

O último ponto a ser citado é a escolha do intervalo de tempo de cada iteração. Anderson (1995), atesta que, por questões de estabilidade para o caso em questão, o valor do passo temporal deve obedecer:

$$\Delta t_i^t = C \frac{\Delta x'}{c' + V'} \Rightarrow \Delta t_i^t = C \frac{\Delta x'}{\sqrt{\frac{kRT}{kRT_c}} + V'} \Rightarrow \boxed{\Delta t_i^t = C \frac{\Delta x'}{\sqrt{T'} + V'}} \quad (5.90)$$

Devendo ser escolhido o menor dentre todos os calculados para cada ponto. O valor C apresentado se trata do número de Courant tendo seu valor no domínio $I \in \mathbb{R} / I =]0,1]$. Fisicamente, a escolha do menor Δt_i significa tomar o menor tempo no qual uma onda de perturbação pode avançar de um ponto para o outro do escoamento, daí a necessidade de se tomar o menor valor a fim de capturar todo o fenômeno no domínio em análise.

5.4. APLICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO BOCAL QUASE-UNIDIMENSIONAL AO PROBLEMA DE Esvaziamento da Câmara de Combustão

Para esta determinação, novamente será utilizada a equação diferencial já deduzida na seção 5.1, que calcula variação temporal da pressão no interior da câmara de combustão a partir do volume livre desta (variável com a queima do combustível), temperatura interna, propriedades do gás resultante do processo e número de Mach na garganta, para o caso bloqueado desejado a fim de maximizar a vazão mássica, $M_2 = 1$.

$$\frac{dp_c}{dt} = \frac{RT_c}{V_{livre}} \left[aA_{queima} \left(\rho_{comb} - \frac{p_c}{RT_c} \right) p_c^n - p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \right] \quad (5.91)$$

Considerando um propelente sólido de geometria cilíndrica o qual queima com área constante igual a sua seção transversal ao longo de seu comprimento, e denotando seu comprimento por L_c e diâmetro D_c , tem-se seu valor inicial dado por:

$$V_q(t = 0) = \pi \frac{D_c^2}{4} L_c \quad (5.92)$$

Como sua queima depende da pressão da câmara de combustão, no instante $t + \Delta t$ genérico tem-se que o volume de combustível é:

$$V_q(t + \Delta t) = V_q(t) - \left[\underbrace{(ap_c^n)}_{\dot{r}} \left(\pi \frac{D_c^2}{4} \right) \right] \Delta t \quad (5.93)$$

Assim, o volume livre da câmara é dado pelo volume morto (volume inicial no qual não há combustível sólido) somado ao total de volume de combustível queimado:

$$V_{livre}(t) = V_{livre}(0) + V_q(t) \quad (5.94)$$

5.4.1. Implementação computacional

A fim de introduzir esta dinâmica a simulação do bocal quase-unidimensional, nota-se que a pressão no interior da câmara de combustão já não mais será constante, desta forma, a cada passo de tempo ela será alterada. O equivalente a isto é dizer que a pressão na seção de admissão do bocal será alterada a cada passo de tempo segundo a equação diferencial que rege o fenômeno. O procedimento para este cálculo é descrito em sequência.

1. Obtenção dos parâmetros físicos T, ρ para o cálculo da pressão da câmara com dimensão física;

$$T_c = T_1'^t(T_c) \quad (5.95)$$

$$\rho_c = \rho_1'^t(\rho_c) \quad (5.96)$$

$$p_c^t = \rho_c R T_c \quad (5.97)$$

2. Para uma variação Δt de tempo, calcular o novo volume da câmara de combustão

$$V_{livre}(t + \Delta t) = V_{livre}(0) + \left\{ V_q(t) - \left[\frac{(ap_c^n)}{\dot{r}} \left(\pi \frac{D_c^2}{4} \right) \right] \Delta t \right\} \quad (5.98)$$

3. Verificar se o bocal está ou não bloqueado a partir da comparação entre a pressão da câmara de combustão e do receptor:

$$\frac{p_{garganta}^t}{p_c^t} \geq \left(1 + \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{-k}{k-1}} \quad (5.99)$$

4. Com a verificação se o bocal está ou não bloqueado, aplicar adequadamente a equação que diz respeito a taxa de variação da pressão na câmara de combustão com o tempo. Esta também possui duas possibilidades: uma no caso em que ainda há combustível sólido no interior da câmara, e outra na

qual não. Na última situação não há geração de gases oriundos do processo de combustão, havendo somente o esvaziamento do componente até que a pressão interna se iguale a externa.

a) caso COM combustível no interior da câmara

$$\frac{dp_c}{dt} = \frac{RT_c}{V_{livre}} \left[aA_{queima}(\rho_{comb} - \rho_{gás})p_c^n - p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \right] \quad (5.100)$$

b) caso SEM combustível no interior da câmara

$$\frac{dp_c}{dt} = \frac{RT_c}{V_{livre}} \left[-aA_{queima}(\rho_{gás})p_c^n - p_c M_2 A_2 \sqrt{\frac{k}{RT_c} \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} \right] \quad (5.101)$$

5. A nova pressão na câmara de combustão é dada por:

$$p_c^{t+\Delta t} = p_c^t + \left(\frac{dp_c}{dt} \right)_t \Delta t \quad (5.102)$$

5.4.2. Determinação do perfil

A fim de aplicar o modelo quase-unidimensional para o fim proposto, se faz necessário determinar o perfil do bocal desejado a fim de gerar a função que descreve a área do mesmo. Com este escopo selecionou-se um número de Mach na saída (2,5) e um raio de garganta (0,02 m) a fim de gerar a geometria externa da seção divergente. O resultado para 50 características está ilustrado na figura 5.8.

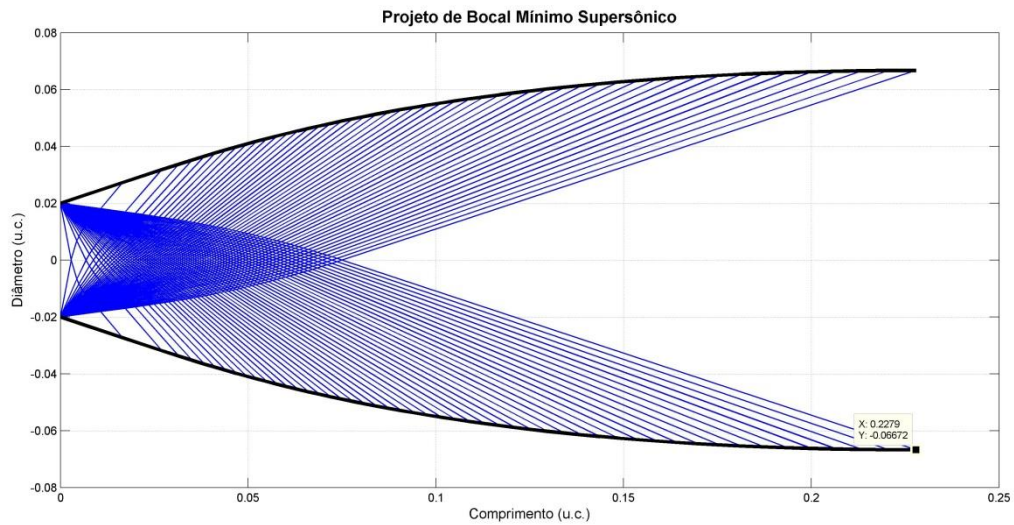


Figura 5.8 – Geometria do bocal divergente calculada

A partir dos pontos gerados pelo método das características fez-se 3 interpolações de polinômios de diferentes graus tais como apresentadas pelas figuras 5.9 a 5.11 a fim de verificar qual possui maior aderência. Este será utilizado como função para determinação da variação de área no algoritmo para o cômputo da variação da pressão na câmara de combustão.

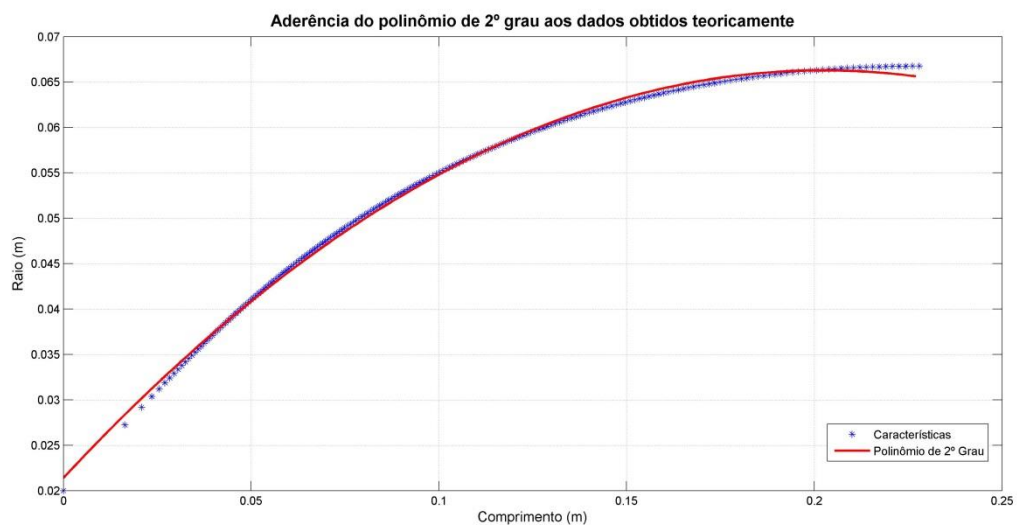


Figura 5.9 – Interpolação de polinômio de 2º grau

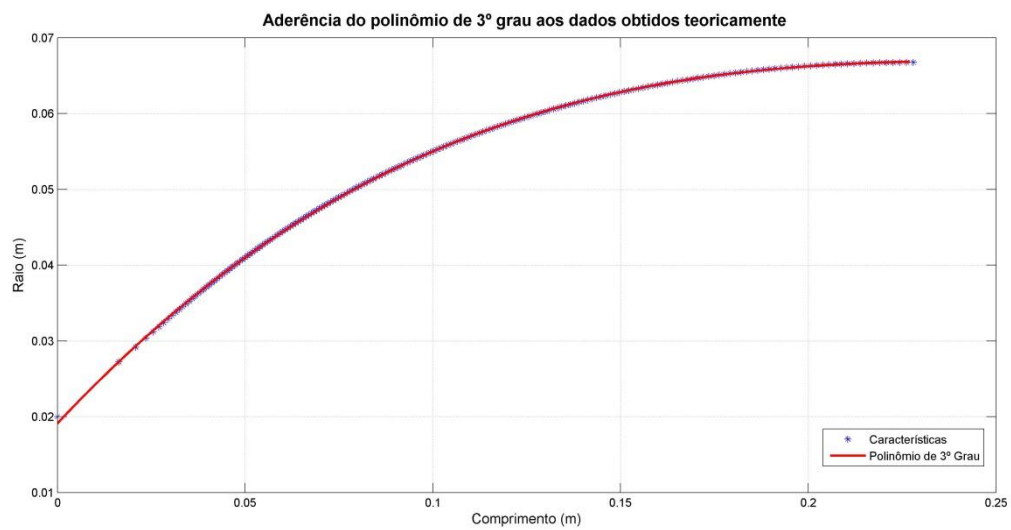


Figura 5.10 – Interpolação de polinômio de 3º grau

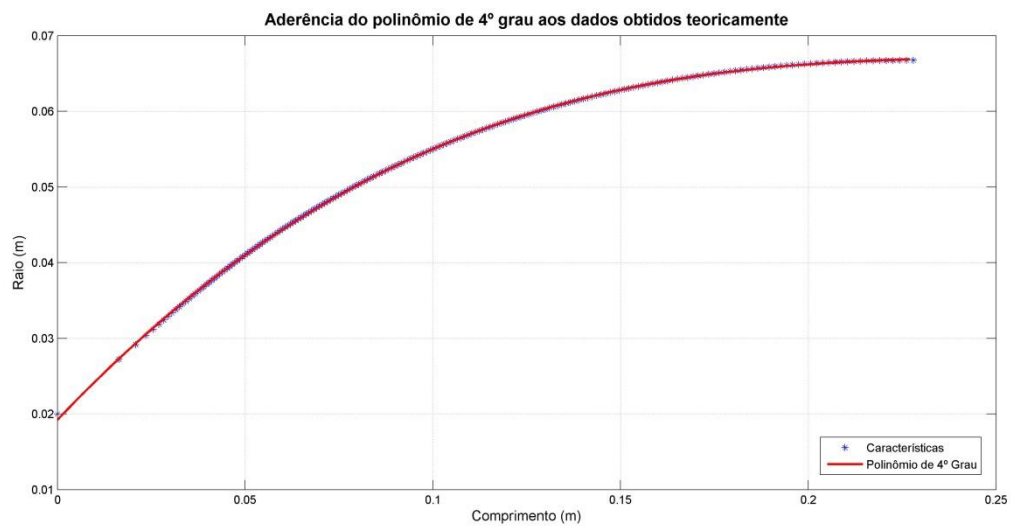


Figura 5.11 – Interpolação de polinômio de 4º grau

Fica claro da análise dos gráficos que os polinômios de 3º e 4º grau seguem de maneira mais fiel o perfil gerado. A maior diferença entre ambos está na porção da garganta, na qual o polinômio de maior grau apresenta cota mais próxima daquela especificada (0,0191 m). Do exposto selecionou-se esta função para determinação do raio do bocal, sendo os coeficientes dados por:

$$r(x) = 1,2487(x - x_0)^4 + 1,7049(x - x_0)^3 - 1,8288(x - x_0)^2 + 0,5526(x - x_0) + 0,0192 \quad (5.104)$$

O perfil convergente, apenas para verificação será aproximado por uma função exponencial decrescente de forma que a garganta fique na posição de 3 cm ao longo do eixo longitudinal. O perfil proposto está ilustrado na figura 5.12. Nota-se que o perfil interno não é aerodinâmico, o que possui implicações no escoamento induzindo regiões com queda de pressão a jusante. Isto será negligenciado no presente momento dada a avaliação isentrópica adotada, sem levar em consideração perdas de qualquer natureza. Naturalmente na situação este deve ser corrigido.

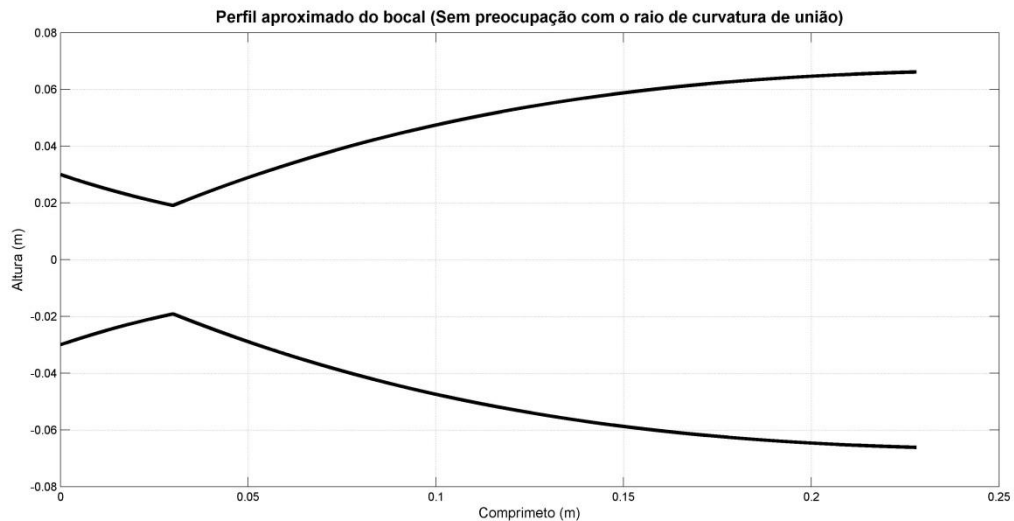


Figura 5.12 – Perfil proposto para avaliação do problema de esvaziamento da câmara de combustão

5.5. MODELO DINÂMICO

5.5.1. Obtenção do modelo dinâmico não-linear

Para obtenção do modelo dinâmico de um míssil, utilizou-se mecânica vetorial através do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e do Teorema do Momento

Angular (TMA), de modo similar aqueles apresentados por Jenkins (1984) e Özkan (2005).

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cg} \quad (5.105)$$

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (5.106)$$

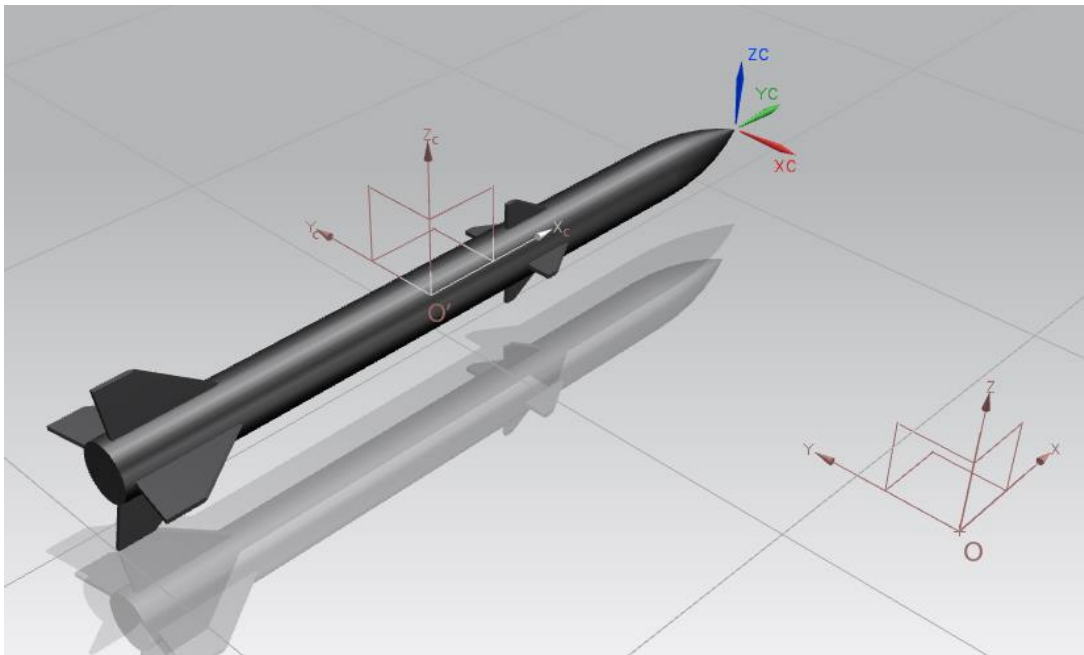


Figura 5.13 – Modelo físico do míssil

A figura 5.13 ilustra o modelo físico do corpo em movimento bem como os sistemas de coordenadas selecionados para a obtenção das equações de movimento. O sistema inercial foi escolhido como algum ponto localizado na superfície do globo terrestre supondo este fixo em relação ao espaço, isto é, desprezou-se qualquer efeito da rotação da Terra, justificando-se esta escolha dado a distância a qual se propõe que o míssil se desloque na missão. Naturalmente que se o mesmo se tratasse de um míssil balístico de longo alcance, este efeito da rotação do globo terrestre seria importante, não podendo ser negligenciado.

Nota-se, ainda da figura 5.13 a escolha por alocar um sistema de referência solidário ao corpo com o eixo $O'x_c$ na direção do nariz do míssil passando pelo seu centro de massa e os demais também passando por este ponto e perpendiculares ao $O'x_c$ convencionando uma base ortonormal positiva. A fim de representar este sistema de coordenadas solidário ao corpo em relação ao sistema de coordenadas inercial foram utilizados os ângulos de Euler (Etkin, 1972) com sequência exata de rotações dada por:

- Rotação de ψ ao redor do eixo Oz (arfagem);
- Rotação de θ ao redor do eixo Oy' (guinada);
- Rotação de ϕ ao redor do eixo Ox'' (rolagem).

A figura 5.14 ilustra a sequência de rotações proposta. Destas, pode-se escrever as matrizes de transformação de base para cada uma das rotações.

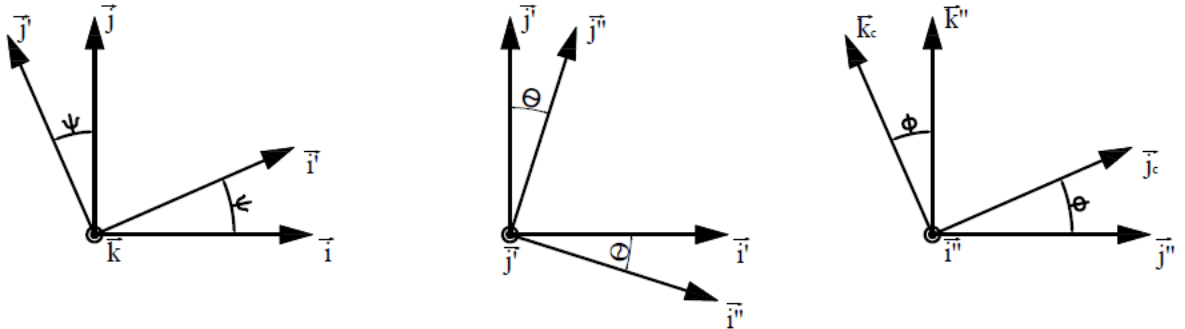


Figura 5.14 – Convenção para as rotações do sistema fixo ao corpo em relação ao inercial segundo os ângulos de Euler

$$\{\vec{x}\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]_{0 \rightarrow 1}} \{\vec{x}'\} \quad (5.107)$$

$$\{\vec{x}'\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{[T]_{1 \rightarrow 2}} \{\vec{x}''\} \quad (5.108)$$

$$\{\vec{x}''\} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{[T]_{2 \rightarrow c}} \{\vec{x}_c\} \quad (5.109)$$

Todas as matrizes de transformação de base ($[T]_{0 \rightarrow 1}$, $[T]_{1 \rightarrow 2}$ e $[T]_{2 \rightarrow c}$) são ortogonais, isto é:

$$A^t = A^{-1}$$

Desta forma as transformações inversas são dadas por:

$$\{\vec{x}'\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & \sen\psi & 0 \\ -\sen\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T]_{1 \rightarrow 0}} \{\vec{x}\} \quad (5.110)$$

$$\{\vec{x}''\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{[T]_{2 \rightarrow 1}} \{\vec{x}'\} \quad (5.111)$$

$$\{\vec{x}_c\} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sen\phi \\ 0 & -\sen\phi & \cos\phi \end{bmatrix}}_{[T]_{c \rightarrow 2}} \{\vec{x}''\} \quad (5.112)$$

Com estas equações é possível escrever a velocidade angular do centro de massa do míssil em relação ao ponto O do sistema de referência inercial no sistema de coordenadas solidário ao míssil. Seja a velocidade angular em relação ao referencial inercial:

$$\vec{\omega}_{c/o} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{j}' + \dot{\phi}\vec{i}'' \quad (5.113)$$

Mas, das matrizes de transformação de base, reescrevendo todos os versores de (5.113) em relação ao sistema de coordenadas solidário ao corpo:

$$\begin{cases} \vec{i}'' = \vec{i}_c \\ \vec{j}' = \vec{j}'' = \cos\phi\vec{j}_c - \sen\phi\vec{k}_c \\ \vec{k} = \vec{k}' = \sen\theta\vec{i}_c + \cos\theta(\sen\phi\vec{j}_c + \cos\phi\vec{k}_c) \end{cases}$$

Logo:

$$\vec{\omega}_{c/o} = [\dot{\phi} + \dot{\psi}\sen\theta \quad \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sen\phi \quad \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\cos\phi] \begin{Bmatrix} \vec{i}_c \\ \vec{j}_c \\ \vec{k}_c \end{Bmatrix} \quad (5.114)$$

Portanto, segundo a notação usual em dinâmica de aeronaves (Etkin, 1972), as componentes da velocidade angular podem ser escritas segundo:

$$p = \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \quad (5.115)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \quad (5.116)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \quad (5.117)$$

Resolvendo o sistema linear formado pelas equações (5.115) a (5.117) obtém-se as componentes de variação temporal dos ângulos de Euler em função das velocidades angulares do corpo:

$$\dot{\psi} = \frac{q \sin \phi + r \cos \theta}{\cos \theta} \quad (5.118)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (5.119)$$

$$\dot{\phi} = p - (q \sin \phi + r \cos \theta) \tan \theta \quad (5.120)$$

Vale ressaltar que há uma limitação de guinada dado que, dá equação (5.118), θ deve ser diferente de 90° caso contrário o que se tem é uma indeterminação.

De posse das velocidades angulares escritas segundo o sistema de coordenadas do corpo, fica fácil determinar o momento angular no míssil. A escolha deste sistema de coordenadas traz consigo uma facilidade ímpar no tratamento deste termo: a matriz de inércia é constante a qualquer instante de tempo isto porque a referência de cálculo para esta é sempre a mesma, independentemente da posição do corpo tal como seria caso a avaliação da quantidade de movimento angular fosse realizada no referencial fixo na Terra. A equação da quantidade de movimento angular é dada por:

$$\vec{H} = m(P - O)x\vec{v}_o + \left\{ \vec{l}_c \quad \vec{J}_c \quad \vec{k}_c \right\} \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (5.121)$$

Como o corpo está sendo avaliado no seu centro de massa, $(P - O) = \vec{0}$, desta forma:

$$\vec{H} = \{\vec{l}_c \quad \vec{J}_c \quad \vec{k}_c\} \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (5.122)$$

Derivando (5.122) em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \left[\frac{d\{\vec{l}_c \quad \vec{J}_c \quad \vec{k}_c\}}{dt} \right] \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} + \{\vec{l}_c \quad \vec{J}_c \quad \vec{k}_c\} \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \frac{d\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}}{dt} \quad (5.123)$$

Mas:

$$\frac{d\vec{l}_c}{dt} = (p, q, r)x\vec{l}_c = r\vec{J}_c - q\vec{k}_c$$

$$\frac{d\vec{J}_c}{dt} = (p, q, r)x\vec{J}_c = p\vec{k}_c - r\vec{l}_c$$

$$\frac{d\vec{k}_c}{dt} = (p, q, r)x\vec{k}_c = q\vec{l}_c - p\vec{J}_c$$

Então, já reorganizando as equações segundo cada um dos versores e assumindo o míssil como um corpo de revolução simétrico segundo os planos $O'x_cy_c$ e $O'x_cz_c$ com as superfícies de controle nestes planos, todos os produtos de inércia se tornam zero, restando somente os termos referentes aos momentos de inércia, obtém-se as equações referentes a variação da quantidade de movimento angular.

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = [J_x p + q r (J_z - J_y) \quad J_y q + p r (J_x - J_z) \quad J_z r + p q (J_y - J_x)] \begin{Bmatrix} \vec{l}_c \\ \vec{J}_c \\ \vec{k}_c \end{Bmatrix} \quad (5.124)$$

Os momentos atuantes no míssil possuem basicamente três origens, uma relacionada às forças aerodinâmicas devido a imersão do corpo em movimento no

meio fluído (atmosfera) e o momento relacionado ao empuxo, eventualmente utilizado para fazer o controle vetorial através do movimento do conjunto de exaustão dos gases, além de um vetor de perturbação. Desta forma:

$$\vec{M}_{aer} + \vec{M}_{prop} + \vec{M}_{pert} = \begin{bmatrix} J_x p + q r (J_z - J_y) & J_y q + p r (J_x - J_z) & J_z r + p q (J_y - J_x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_c \\ \vec{j}_c \\ \vec{k}_c \end{Bmatrix} \quad (5.125)$$

Resta, agora, a avaliação do Teorema do Movimento do Baricentro para obtenção das componentes de aceleração do corpo. A Aceleração do corpo é dada, em termos absolutos, por:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{\omega}_{c/o}^c \times \vec{v}_c \quad (5.126)$$

Mas, \vec{a} é a própria aceleração do corpo no sistema de referência inercial, sendo, portanto igual a:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{m}$$

E o produto vetorial entre a velocidade angular e a velocidade do corpo, avaliadas no referencial fixo no corpo, é dado por:

$$\vec{\omega}_{c/o}^c \times \vec{v}_c = \begin{bmatrix} \vec{i}_c & \vec{j}_c & \vec{k}_c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q w - r v & r u - p w & p v - q u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_c \\ \vec{j}_c \\ \vec{k}_c \end{Bmatrix}$$

Assim, as acelerações tomadas no referencias do corpo são:

$$\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_x}{m} - (q w - r v) \\ \frac{F_y}{m} - (r u - p w) \\ \frac{F_z}{m} - (p v - q u) \end{Bmatrix} \quad (5.127)$$

As forças externas que agem no corpo podem ser divididas em quatro vetores distintos: aerodinâmicas, propulsão, de campo e de perturbação (por exemplo uma

rajada). Todas estas, a exceção daquela relacionada a algum campo, no caso o campo gravitacional, são mais facilmente expressas no sistema de coordenadas do corpo, uma das razões pela qual o modelo é avaliado neste sistema de referência. Desta forma, é necessário fazer a transformação de base com o escopo de avaliar a força peso no referencial solidário ao corpo. Seja a aceleração da gravidade orientada na direção z do sistema de coordenadas inercial em seu sentido negativo, assim:

$$\vec{P} = -mg\vec{k} \quad (5.128)$$

Para esta mudança, deve-se escrever a equação (5.128) em termos dos versores do sistema de referência solidário ao corpo, de tal sorte que se tem:

$$\{\vec{x}\} = \underbrace{[T]_{0 \rightarrow 1}[T]_{1 \rightarrow 2}[T]_{2 \rightarrow c}}_{[T]} \{\vec{x}_c\} \quad (5.129)$$

Com

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\cos\psi & \cos\psi\cos\phi - \sin\phi\sin\psi\sin\theta & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\theta\cos\psi & -\sin\phi\cos\psi - \sin\psi\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\vec{P}^c = -mg \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i}_c \\ \vec{j}_c \\ \vec{k}_c \end{Bmatrix} \quad (5.130)$$

Em suma, as equações para a aceleração obtidas a partir da 2ª Lei de Newton são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_{aer_x}^c + F_{prop_x}^c + P_x^c + F_{pert_x}^c}{m} - (qw - rv) \\ \frac{F_{aer_y}^c + F_{prop_y}^c + P_y^c + F_{pert_y}^c}{m} - (ru - pw) \\ \frac{F_{aer_z}^c + F_{prop_z}^c + P_z^c + F_{pert_z}^c}{m} - (pv - qu) \end{Bmatrix} \quad (5.131)$$

Agora se faz necessário, finalmente, avaliar os momentos e as forças atuantes no míssil exceto pela força peso que já fora abordada. Como o escopo do modelo dinâmico é fornecer meios para o projeto de um sistema de controle para o míssil e este, segundo Özkan (2005) só se inicia após a fase de *boost*, tais forças não estão atuando no modelo a ser descrito e também a massa do objeto é constante, facilitando o projeto do controlador. Assim, a simplificação é dada por:

$$\vec{M}_{prop}^c = 0 \text{ Nm e } \vec{F}_{prop}^c = 0 \text{ N}$$

As forças aerodinâmicas são dadas conforme usualmente demonstrado em livros sobre o assunto, tal como Anderson (1991), ou seja, variando com o quadrado da distância da velocidade do escoamento ao longe, no caso a própria velocidade do míssil, seno proporcional a um coeficiente, seja ele de arrasto ou sustentação. Para o problema proposto as forças aerodinâmicas serão tomadas uma em cada direção do sistema de referência solidário ao corpo, sendo elas dadas por:

$$F_{aer_x}^c = \frac{1}{2} C_x \rho_{ar} \underbrace{(u^2 + v^2 + w^2)}_{v_c^2} S_{corpo} \quad (5.132)$$

$$F_{aer_y}^c = \frac{1}{2} C_y \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) S_{corpo} \quad (5.133)$$

$$F_{aer_z}^c = \frac{1}{2} C_z \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) S_{corpo} \quad (5.134)$$

Analogamente para os momentos aerodinâmicos:

$$L = \frac{1}{2} C_l \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) S_{corpo} D_{corpo} \text{ (rolagem)} \quad (5.135)$$

$$M = \frac{1}{2} C_m \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) S_{corpo} D_{corpo} \text{ (Guinada)} \quad (5.136)$$

$$N = \frac{1}{2} C_n \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) S_{corpo} D_{corpo} \text{ (Arfagem)} \quad (5.137)$$

Com os coeficientes linearizados segundo Vuran (2003), dados por:

$$C_x = C_{x_0} \quad (5.138)$$

$$C_y = C_{y_\beta} \beta + C_{y_\delta} \delta_r + C_{y_r} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} r \quad (5.139)$$

$$C_z = C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_\delta} \delta_e + C_{z_q} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} q \quad (5.140)$$

$$C_l = C_{l_\delta} \delta_a + C_{l_p} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} p \quad (5.141)$$

$$C_m = C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_\delta} \delta_e + C_{m_q} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} q \quad (5.142)$$

$$C_n = C_{n_\beta} \beta + C_{n_\delta} \delta_r + C_{n_r} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} r \quad (5.143)$$

Os coeficientes C_i são todos obtidos a partir do software *Missile Datcom* das forças aéreas americanas. Tal consiste num código em FORTRAN que quando compilado fornece um executável que lê um arquivo de entrada no formato .dat com informações tais como a geometria do míssil, número de seções com superfícies aerodinâmicas, ângulo de ataque ($\alpha \cong w/u$), ângulo de glissagem ($\beta \cong v/u$), número de Mach.

Os valores de δ indicam as deflexões equivalentes a dos ailerons (δ_a), leme (δ_r) e estabilizadores (δ_e). Supondo o modelo de superfícies de controle para o míssil tal como assinalado pela figura 5.15, é possível relacionar cada uma destas deflexões em função das deflexões de cada uma das superfícies de controle do míssil, cada qual a 90° da outra.

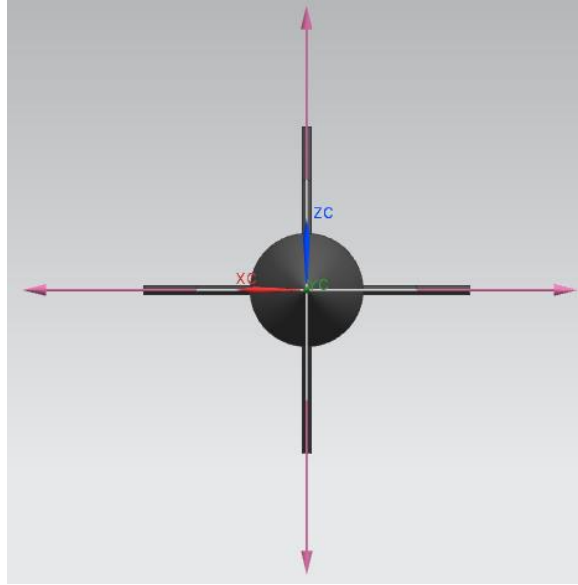


Figura 5.15 – Deflexões das superfícies de controle

$$\delta_a = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}$$

$$\delta_e = \frac{\delta_2 - \delta_4}{2}$$

$$\delta_r = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2}$$

Finalmente, de posse destas relações lineares para os coeficientes aerodinâmicos e as simplificações propostas é possível, a partir das equações (5.118), (5.125) e (5.131) isolar as acelerações lineares e angulares de tal sorte que se obtém um sistema não-linear de 9 equações $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$ e 9 incógnitas $(u, v, w, p, q, r, \phi, \psi, \theta)$. As equações estão listadas de (5.144) a (5.152).

$$\dot{u} = -\frac{1}{2}\rho_{ar}\frac{u^2 + v^2 + w^2}{m}\frac{\pi D_m^2}{4}C_{x_0} - g\sin\theta - qw + rv \quad (5.144)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{2}\rho_{ar}\frac{u^2 + v^2 + w^2}{m}\frac{\pi D_m^2}{4}\left(C_{y_\beta}\beta + C_{y_\delta}\delta_r + C_{y_r}\frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}r\right) - g\cos\theta\sin\phi + pw - ru \quad (5.145)$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{2}\rho_{ar}\frac{u^2 + v^2 + w^2}{m}\frac{\pi D_m^2}{4}\left(C_{z_\alpha}\alpha + C_{z_\delta}\delta_e + C_{z_q}\frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}q\right) - g\cos\theta\cos\phi + qu - pv \quad (5.146)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{J_x}\left\{\frac{1}{2}\rho_{ar}(u^2 + v^2 + w^2)\frac{\pi D_m^3}{4}\left[C_{l_\delta}\left(\frac{\delta_1 + \delta_3}{2}\right) + C_{l_p}\frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}p\right]\right\} + \frac{(J_y - J_z)}{J_x}qr \quad (5.147)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{J_y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{m_a} \frac{w}{u} + C_{m_\delta} \left(\frac{\delta_2 - \delta_4}{2} \right) + C_{m_q} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} q \right] \right\} + \frac{(J_z - J_x)}{J_y} pr \quad (5.148)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{J_z} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u^2 + v^2 + w^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{n_\beta} \frac{v}{u} + C_{n_\delta} \left(\frac{\delta_1 - \delta_3}{2} \right) + C_{n_r} \frac{D_m}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} r \right] \right\} + \frac{(J_x - J_y)}{J_z} pq \quad (5.149)$$

$$\dot{\psi} = \frac{q \sin \phi + r \cos \theta}{\cos \theta} \quad (5.150)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (5.151)$$

$$\dot{\phi} = p - (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \quad (5.152)$$

5.5.2. Linearização das equações de movimento

A fim de formar um sistema de equações lineares aproximadas a partir das equações (5.144) a (5.152), para cada uma destas será feita a expansão dos termos em série de Taylor ao redor do ponto de equilíbrio, obtendo-se assim relações com erro de segunda ordem para cada uma das equações descritas. A forma final do sistema de equações será dada, em espaços de estado por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} u + u_0 \\ v + v_0 \\ w + w_0 \\ p + p_0 \\ q + q_0 \\ r + r_0 \\ \psi + \psi_0 \\ \theta + \theta_0 \\ \phi + \phi_0 \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \delta_1 + \delta_{1_0} \\ \delta_2 + \delta_{2_0} \\ \delta_3 + \delta_{3_0} \\ \delta_4 + \delta_{4_0} \end{Bmatrix} \quad (5.153)$$

Linearizando a equação (5.144):

$$\begin{aligned} \dot{u} \cong u_0 + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \Big|_0 (u - u_0) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial v} \Big|_0 (v - v_0) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial w} \Big|_0 (w - w_0) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} \Big|_0 (\theta - \theta_0) \\ + \frac{\partial \dot{u}}{\partial q} \Big|_0 (q - q_0) + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \Big|_0 (r - r_0) + \mathcal{O}(\Delta u^2) \end{aligned} \quad (5.154)$$

Com:

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \right|_0 = -\frac{1}{4} \frac{\rho_{ar}}{m} u_0 \pi D_m^2$$

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial v} \right|_0 = -\frac{1}{4} \frac{\rho_{ar}}{m} v_0 \pi D_m^2$$

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial w} \right|_0 = -\frac{1}{4} \frac{\rho_{ar}}{m} w_0 \pi D_m^2$$

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \right|_0 = -w_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \right|_0 = -v_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \right|_0 = -g \cos \theta_0$$

A equação (5.145)

$$\begin{aligned} \dot{v} \cong & \dot{v}_0 + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} \right|_0 (u - u_0) + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right|_0 (v - v_0) + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial w} \right|_0 (w - w_0) + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} \right|_0 (\theta - \theta_0) \\ & + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi} \right|_0 (\phi - \phi_0) + \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial q} \right|_0 (p - p_0) + \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right|_0 (r - r_0) \\ & + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_1} \right|_0 (\delta_1 - \delta_{10}) + \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_1} \right|_0 (\delta_3 - \delta_{30}) + \mathcal{O}(\Delta v^2) \end{aligned} \quad (5.155)$$

Com:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} \right|_0 = & -\frac{\rho_{ar}}{m} u_0 \left[C_{y\beta} \frac{v_0}{u_0} + \frac{C_{y\delta}}{2} (\delta_{10} - \delta_{30}) + \frac{C_{yr}}{2} \frac{D_m}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}}} r_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \left[C_{y\beta} \frac{v_0}{u_0^2} + \frac{C_{yr}}{2} \frac{D_m u_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} - r_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right|_0 &= -\frac{\rho_{ar}}{m} v_0 \left[C_{y_\beta} \frac{v_0}{u_0} + \frac{C_{y_\delta}}{2} (\delta_{1_0} - \delta_{3_0}) + \frac{C_{y_r}}{2} \frac{D_m}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}}} r_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \left[\frac{C_{y_r}}{2} \frac{D_m v_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 - C_{y_\beta} \frac{1}{u_0} \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} \right|_0 &= -\frac{\rho_{ar}}{m} w_0 \left[C_{y_\beta} \frac{v_0}{u_0} + \frac{C_{y_\delta}}{2} (\delta_{1_0} - \delta_{3_0}) + \frac{C_{y_r}}{2} \frac{D_m}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}}} r_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \left[\frac{C_{y_r}}{2} \frac{D_m w_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} + p_0 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial p} \right|_0 = w_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} \right|_0 = -u_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} \right|_0 = g \sin \theta_0 \sin \phi_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi} \right|_0 = -g \cos \theta_0 \cos \phi_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_1} \right|_0 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{C_{y_\delta}}{2} \frac{\pi D_m^2}{4}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_3} \right|_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{C_{y_\delta}}{2} \frac{\pi D_m^2}{4}$$

A equação (5.146)

$$\begin{aligned} \dot{w} &\cong \dot{w}_0 + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial u} \right|_0 (u - u_0) + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} \right|_0 (v - v_0) + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} \right|_0 (w - w_0) + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right|_0 (\theta - \theta_0) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi} \right|_0 (\phi - \phi_0) + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial p} \right|_0 (p - p_0) + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} \right|_0 (q - q_0) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_2} \right|_0 (\delta_2 - \delta_{2_0}) + \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_4} \right|_0 (\delta_4 - \delta_{4_0}) + \mathcal{O}(\Delta w^2) \end{aligned} \tag{5.156}$$

Com:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial u} \right|_0 = & -\frac{\rho_{ar}}{m} u_0 \left[C_{z\alpha} \frac{w_0}{u_0} + \frac{C_{z\delta}}{2} (\delta_{2_0} - \delta_{4_0}) + \frac{C_{zq}}{2} \frac{D_m}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}}} q_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \left[C_{z\alpha} \frac{w_0}{u_0^2} + \frac{C_{zq}}{2} \frac{D_m u_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} + q_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} \right|_0 = & -\frac{\rho_{ar}}{m} v_0 \left[C_{z\alpha} \frac{w_0}{u_0} + \frac{C_{z\delta}}{2} (\delta_{2_0} - \delta_{4_0}) + \frac{C_{zq}}{2} \frac{D_m}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}}} q_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \left[\frac{C_{zq}}{2} \frac{D_m v_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} q_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} - p_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial u} \right|_0 = & -\frac{\rho_{ar}}{m} w_0 \left[C_{z\alpha} \frac{w_0}{u_0} + \frac{C_{z\delta}}{2} (\delta_{2_0} - \delta_{4_0}) + \frac{C_{zq}}{2} \frac{D_m}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}}} q_0 \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \left[\frac{C_{zq}}{2} \frac{D_m w_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} q_0 - C_{z\alpha} \frac{1}{u_0} \right] \frac{\pi D_m^2}{4} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial p} \right|_0 = -v_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} \right|_0 = u_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} \right|_0 = g \sin \theta_0 \cos \phi_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi} \right|_0 = g \cos \theta_0 \sin \phi_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_2} \right|_0 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{C_{z\delta}}{2} \frac{\pi D_m^2}{4}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_4} \right|_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{m} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{C_{z\delta}}{2} \frac{\pi D_m^2}{4}$$

A equação (5.147)

$$\begin{aligned}
\dot{p} \cong \dot{p}_0 + \frac{\partial \dot{p}}{\partial u} \Big|_0 (u - u_0) + \frac{\partial \dot{p}}{\partial v} \Big|_0 (v - v_0) + \frac{\partial \dot{p}}{\partial w} \Big|_0 (w - w_0) + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \Big|_0 (p - p_0) \\
+ \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \Big|_0 (q - q_0) + \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \Big|_0 (r - r_0) + \frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_1} \Big|_0 (\delta_1 - \delta_{10}) \\
+ \frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_3} \Big|_0 (\delta_3 - \delta_{30}) + \mathcal{O}(\Delta p^2)
\end{aligned} \tag{5.157}$$

Com:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{p}}{\partial u} \Big|_0 &= \frac{1}{J_x} \left\{ \rho_{ar} u_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{l_\delta} \left(\frac{\delta_{10} + \delta_{30}}{2} \right) + \frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} p_0 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{J_x} \left[\frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m u_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} p_0 \right] \right\} \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial v} \Big|_0 &= \frac{1}{J_x} \left\{ \rho_{ar} v_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{l_\delta} \left(\frac{\delta_{10} + \delta_{30}}{2} \right) + \frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} p_0 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{J_x} \left[\frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m v_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} p_0 \right] \right\} \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial w} \Big|_0 &= \frac{1}{J_x} \left\{ \rho_{ar} w_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{l_\delta} \left(\frac{\delta_{10} + \delta_{30}}{2} \right) + \frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} p_0 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{J_x} \left[\frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m w_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} p_0 \right] \right\} \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \Big|_0 &= \frac{1}{J_x} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[\frac{C_{l_p}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} \right] \right\} \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \Big|_0 &= \frac{J_y - J_z}{J_x} r_0 \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \Big|_0 &= \frac{J_y - J_z}{J_x} q_0 \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_1} \Big|_0 &= \frac{1}{J_x} \left\{ \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \frac{C_{l_\delta}}{2} \right\} \\
\frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_3} \Big|_0 &= \frac{1}{J_x} \left\{ \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \frac{C_{l_\delta}}{2} \right\}
\end{aligned}$$

A equação (5.148)

$$\begin{aligned}
 \dot{q} \cong \dot{q}_0 + \frac{\partial \dot{q}}{\partial u} \Big|_0 (u - u_0) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial v} \Big|_0 (v - v_0) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial w} \Big|_0 (w - w_0) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \Big|_0 (p - p_0) \\
 + \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \Big|_0 (q - q_0) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial r} \Big|_0 (r - r_0) + \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_2} \Big|_0 (\delta_2 - \delta_{20}) \\
 + \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_4} \Big|_0 (\delta_4 - \delta_{40}) + \mathcal{O}(\Delta q^2)
 \end{aligned} \tag{5.158}$$

Com:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial u} \Big|_0 &= \frac{1}{J_y} \left\{ \rho_{ar} u_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{m_\alpha} \frac{w_0}{u_0} + C_{m_\delta} \left(\frac{\delta_{20} - \delta_{40}}{2} \right) + \frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} q_0 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{J_y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{m_\alpha} \frac{w_0}{u_0^2} + \frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m u_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} q_0 \right] \right\} \right\} \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial v} \Big|_0 &= \frac{1}{J_y} \left\{ \rho_{ar} v_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{m_\alpha} \frac{w_0}{u_0} + C_{m_\delta} \left(\frac{\delta_{20} - \delta_{40}}{2} \right) + \frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} q_0 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{J_y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[\frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m v_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} q_0 \right] \right\} \right\} \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial w} \Big|_0 &= \frac{1}{J_y} \left\{ \rho_{ar} w_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{m_\alpha} \frac{w_0}{u_0} + C_{m_\delta} \left(\frac{\delta_{20} - \delta_{40}}{2} \right) + \frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} q_0 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{J_y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{m_\alpha} \frac{1}{u_0} - \frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m w_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} q_0 \right] \right\} \right\} \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \Big|_0 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} r_0 \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \Big|_0 &= \frac{1}{J_y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[\frac{C_{m_q}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} \right] \right\} \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial r} \Big|_0 &= \frac{J_z - J_x}{J_y} p_0 \\
 \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_2} \Big|_0 &= \frac{1}{J_y} \left\{ \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \frac{C_{m_\delta}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_4} \right|_0 = -\frac{1}{J_y} \left\{ \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3 C_{m\delta}}{4} \frac{C_{m\delta}}{2} \right\}$$

A equação (5.149)

$$\begin{aligned} \dot{r} \cong \dot{r}_0 + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial u} \right|_0 (u - u_0) + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial v} \right|_0 (v - v_0) + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial w} \right|_0 (w - w_0) + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} \right|_0 (p - p_0) \\ + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial q} \right|_0 (q - q_0) + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right|_0 (r - r_0) + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_1} \right|_0 (\delta_1 - \delta_{10}) \\ + \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_3} \right|_0 (\delta_3 - \delta_{30}) + \mathcal{O}(\Delta r^2) \end{aligned} \quad (5.159)$$

Com:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial u} \right|_0 = \frac{1}{J_z} \left\{ \rho_{ar} u_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{n\beta} \frac{v_0}{u_0} + C_{n\delta} \left(\frac{\delta_{10} - \delta_{30}}{2} \right) + \frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} r_0 \right] \right\} \\ - \frac{1}{J_z} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{n\beta} \frac{v_0}{u_0^2} + \frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m u_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial v} \right|_0 = \frac{1}{J_z} \left\{ \rho_{ar} v_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{n\beta} \frac{v_0}{u_0} + C_{n\delta} \left(\frac{\delta_{10} - \delta_{30}}{2} \right) + \frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} r_0 \right] \right\} \\ + \frac{1}{J_y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{n\beta} \frac{1}{u_0} - \frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m v_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial w} \right|_0 = \frac{1}{J_z} \left\{ \rho_{ar} w_0 \frac{\pi D_m^3}{4} \left[C_{n\beta} \frac{w_0}{u_0} + C_{n\delta} \left(\frac{\delta_{10} - \delta_{30}}{2} \right) + \frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} r_0 \right] \right\} \\ - \frac{1}{J_z} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[\frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m w_0}{(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} r_0 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} \right|_0 = \frac{J_x - J_y}{J_z} q_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} \right|_0 = \frac{J_x - J_y}{J_z} p_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right|_0 = \frac{1}{J_z} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3}{4} \left[\frac{C_{nr}}{2} \frac{D_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}} \right] \right\}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_1} \right|_0 = \frac{1}{J_z} \left\{ \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3 C_{n\delta}}{4} \frac{1}{2} \right\}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_3} \right|_0 = -\frac{1}{J_z} \left\{ \rho_{ar} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \frac{\pi D_m^3 C_{n\delta}}{4} \frac{1}{2} \right\}$$

A equação (5.150)

$$\begin{aligned} \dot{\psi} \cong \dot{\psi}_0 + \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial q} \right|_0 (q - q_0) + \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} \right|_0 (r - r_0) + \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \right|_0 (\theta - \theta_0) + \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \phi} \right|_0 (\phi - \phi_0) \\ + \mathcal{O}(\Delta \psi^2) \end{aligned} \quad (5.160)$$

Com:

$$\left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial q} \right|_0 = \frac{\sin \phi_0}{\cos \theta_0}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} \right|_0 = \frac{\cos \phi_0}{\cos \theta_0}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \right|_0 = (q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0) \tan \theta_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \phi} \right|_0 = \frac{q_0 \cos \phi_0 - r_0 \sin \phi_0}{\cos \theta_0}$$

A equação (5.151)

$$\dot{\theta} \cong \dot{\theta}_0 + \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial q} \right|_0 (q - q_0) + \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \right|_0 (r - r_0) + \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \phi} \right|_0 (\phi - \phi_0) + \mathcal{O}(\Delta \theta^2) \quad (5.161)$$

Com:

$$\left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial q} \right|_0 = \cos \phi_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \right|_0 = -\sin \phi_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \phi} \right|_0 = -q_0 \sin \phi_0 - r_0 \cos \phi_0$$

A equação (5.152)

$$\begin{aligned} \dot{\phi} \cong \dot{\phi}_0 + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial p} \right|_0 (p - p_0) + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q} \right|_0 (q - q_0) + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} \right|_0 (r - r_0) + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right|_0 (\theta - \theta_0) \\ + \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \right|_0 (\phi - \phi_0) + \mathcal{O}(\Delta \phi^2) \end{aligned} \quad (5.162)$$

Com:

$$\left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q} \right|_0 = 1$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q} \right|_0 = -\sin \phi_0 \tan \theta_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} \right|_0 = -\cos \phi_0 \tan \theta_0$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right|_0 = -\frac{q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0}{\cos^2 \theta_0}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \right|_0 = (-q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0) \tan \theta_0$$

Com isso, as matrizes dinâmicas e de entrada são dadas por:

$$[A] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial v} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial w} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} \right|_0 & 0 \\ \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial w} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial p} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial u} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial v} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial p} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} \right|_0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial u} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial v} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial w} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \right|_0 & 0 & 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial u} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial v} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial w} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial r} \right|_0 & 0 & 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial u} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial v} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial w} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right|_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \phi} \right|_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} \right|_0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \phi} \right|_0 \\ 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial p} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right|_0 & \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi} \right|_0 \end{bmatrix} \quad (5.163)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_1} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta_3} \right|_0 & 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_2} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_4} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial \dot{p}}{\partial \delta_1} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_3} \right|_0 & 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_2} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_4} \right|_0 \\ \left. \frac{\partial \dot{r}}{\partial \delta_1} \right|_0 & 0 & \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_3} \right|_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.164)$$

A matriz de observação está de acordo com os sensores disponíveis para a mensuração dos parâmetros. Em geral, para obtenção dos estados selecionados para o modelo, é usual a utilização de um giroscópio (taxa de variação da posição angular) e de um acelerômetro (taxa de variação das velocidades) solidários ao

míssil. Esta é uma segunda justificativa para o fato das equações serem todas avaliadas no referencial do corpo em movimento, dado que estes sensores fornecem medidas neste sistema de referência, podendo eventualmente serem integradas e transformadas para a base do referencial inercial, possibilitando a obtenção das posição do míssil a cada instante. Desta forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u}|_0 & \frac{\partial \dot{u}}{\partial v}|_0 & \frac{\partial \dot{u}}{\partial w}|_0 & 0 & \frac{\partial \dot{u}}{\partial q}|_0 & \frac{\partial \dot{u}}{\partial r}|_0 & 0 & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta}|_0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial u}|_0 & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v}|_0 & \frac{\partial \dot{v}}{\partial w}|_0 & \frac{\partial \dot{v}}{\partial p}|_0 & 0 & \frac{\partial \dot{v}}{\partial r}|_0 & 0 & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta}|_0 & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi}|_0 \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial u}|_0 & \frac{\partial \dot{w}}{\partial v}|_0 & \frac{\partial \dot{w}}{\partial w}|_0 & \frac{\partial \dot{w}}{\partial p}|_0 & \frac{\partial \dot{w}}{\partial q}|_0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta}|_0 & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi}|_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial q}|_0 & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r}|_0 & 0 & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \theta}|_0 & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \phi}|_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial q}|_0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r}|_0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \phi}|_0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial p}|_0 & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial q}|_0 & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r}|_0 & 0 & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta}|_0 & \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \phi}|_0 \end{bmatrix} \quad (5.165)$$

E a matriz de incidência direta:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.166)$$

Com isto é possível representar o sistema na forma de espaços de estados, maneira adequada para a síntese do controlador a partir da teoria de controle moderno, tal como ilustrada em Friedland (1986).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fx_p \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

A matriz $[F]$ de perturbações é dada pelos termos oriundos das forças de perturbação já mencionadas, como por exemplo rajadas. Desta forma, a matriz $[F]$, doravante denominada de matriz das perturbações é dada pela equação (5.167).

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.167)$$

Com:

$$x_p = \begin{Bmatrix} F_{pert_x}^c \\ F_{pert_y}^c \\ F_{pert_z}^c \\ M_{pert_x}^c \\ M_{pert_y}^c \\ M_{pert_z}^c \end{Bmatrix}$$

5.7. SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO VISCOSO NO INTERIOR DO BOCAL

O escoamento no interior do bocal será simulado utilizando um software com código comercial de volumes finitos. Ainda que as opções já estejam completamente embutidas no programa, aqui serão demonstradas e justificadas todas as opções relativas as funções de interpolação utilizadas, tipo de escoamento em estudo e modelo do fluido.

5.7.1. Conjunto de equações adotado

Levando em conta que o estudo pretendido visa verificar as diferenças entre um bocal suposto de geometria ótima gerado a partir do uso do método das características durante a região na qual o empuxo está sendo gerado em seu máximo, o que se pretende verificar não é o regime transiente, mas sim o escoamento em regime permanente. Desta forma, todas as taxas de variação das propriedades são negligenciadas, acarretando no sistema de equações parciais diferenciais para um escoamento turbulento dado pelas equações (5.168) a (5.174).

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u}) = 0 \quad (5.168)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{u}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{u}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} u'^2)}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} u' v')}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} u' w')}{\partial z} \right] \quad (5.169)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{v}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{v}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} v' u')}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} v'^2)}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} v' w')}{\partial z} \right] \quad (5.170)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{w}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{w}) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} w' u')}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} w' v')}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} w'^2)}{\partial z} \right] \quad (5.171)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} \vec{T}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{T}) + \left[-\frac{\partial (\bar{\rho} u' T')}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{\rho} v' T')}{\partial y} - \frac{\partial (\bar{\rho} w' T')}{\partial z} \right] \quad (5.172)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \vec{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (5.173)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \vec{u} \omega) = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \nabla \omega \right) + \gamma_2 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_2 \rho \omega^2 \\ + 2 \frac{\rho}{\sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.174)$$

Integrando estas equações num volume finito infinitesimal e utilizando o teorema de Gauss para eliminar os divergentes e analisar as propriedades nas faces, fazendo-se necessário o uso de funções de interpolação para a avaliação nas faces.

5.7.2. Funções de interpolação

No caso em questão as funções de interpolação a serem adotadas são todas de ordem superior, evitando-se assim o uso do método Upwind de 1ª ordem que, embora garanta convergência incondicional, pode acarretar em difusão numérica, conforme discutido em Maliska (2013), o que acarreta em solução inadequada dada sua forte natureza dissipativa. Uma teoria para a difusão numérica está no fato da interpolação upwind não lidar, em problemas bi e tridimensionais, com a direções dadas pela composição das coordenadas das propriedades, incorrendo em problemas numéricos. Maliska (2013), por outro lado, defende que estas oscilações numéricas são advindas do fato deste ser um método com erro de truncamento de 1ª ordem e de ordem dissipativa, não capturando de maneira tão adequada como funções de ordem superior, a dinâmica real do escoamento.

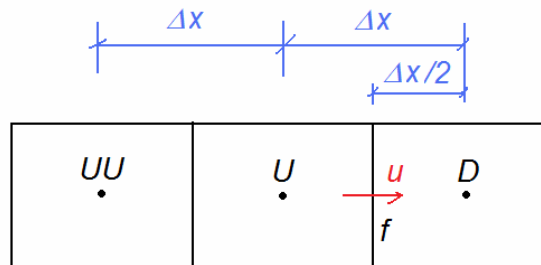
Tendo em vista este horizonte, a escolha das funções de interpolação foi feita de modo a se priorizar esquemas com erros de ordem superior. Não serão apresentadas as deduções relativas as funções de interpolação por não fazerem parte do escopo do trabalho, mas tanto Malalasekera (1995) quanto Maliska (2013) as trazem de maneira bem detalhada.

Para os termos difusivos, a escolha foi pelo esquema de diferenças centradas (CDS – *Central Difference Scheme*) dado seu erro de truncamento de 2ª ordem. Este esquema está apresentado pela equação (5.175) para a face leste (E) do

volume cujo centro é dado pelo ponto P, de uma malha estruturada. Não serão discutidas malhas não estruturadas no presente trabalho pois escopo aqui é de somente ilustrar ao leitor os esquemas de interpolação utilizados.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} + \mathcal{O}(\Delta x_e^2) \quad (5.175)$$

Por sua vez, os termos convectivos - muito importantes no problema em questão dada o escoamento veloz no interior – foram também adotados de ordem superior. A escolha não se deu por um só tendo em vista questões de estabilidade e convergência dependendo do problema adotado. Tanto o método *Upwind* de 2ª ordem quanto o método QUICK (*Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematics*) foram utilizados. As funções de interpolação, em relação a figura 5.16, estão apresentadas pelas equações (5.176) e (5.177).



D: Downwind cell

U: Upwind cell

UU: 2nd Upwind cell

f: face

Figura 5.16 – Malha estruturada (extraído de Saltara, 2014)

- Upwind de 2ª ordem

$$\phi_f = \frac{3}{2} \phi_U - \frac{1}{2} \phi_{UU} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (5.176)$$

- QUICK

$$\phi_f = \frac{6\phi_U + 3\phi_D - \phi_{UU}}{8} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (5.177)$$

5.7.3. Escolha do fluído

Embora o bocal tenha sido dimensionado para o escoamento dos gases de combustão do KNDX, como não foi encontrada a composição deste e o escopo é de somente comparar o padrão de escoamento entre dois bocais de mesma razão de áreas de saída e garganta, um com geometria ótima e outro com geometria cônica, adotou-se o ar como fluído de trabalho. Este está sujeito as mesmas condições de contorno de entrada ($p_c = 2,5 \text{ MPa}$ e $T_c = 1350 \text{ K}$) e saída ($p_{amb} = 101,325 \text{ kPa}$, $T_c = 300 \text{ K}$) em relação ao projeto inicial.

Foram simuladas tanto situações viscosas quanto não viscosas para cada uma das geometrias propostas e fim de realizar as comparações do efeito viscoso no escoamento. Para o caso inviscido as únicas considerações foram a adoção do gás como ideal e utilização de polinômios em função da temperatura para o cálculo do calor específico, este já embutido no software. Para o caso viscoso, além destes parâmetros, utilizou-se a lei de viscosidade de Sutherland (CFD Online, 2013) para o ar, dada pela equação (5.178).

$$\mu = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + S}{T + S} \quad (5.178)$$

Com T_{ref} uma temperatura de referência, μ_{ref} a viscosidade de referência calculada a T_{ref} e S a temperatura de Sutherland. Para o caso do ar, $\mu_{ref} = 1,716 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$, $T_{ref} = 273,15 \text{ K}$ e $S = 110,4 \text{ K}$.

A condutividade térmica também é variável de acordo com a teoria cinética dos gases, sendo dada por (5.179) conforme explicitado em UC Davis (2006).

$$k = \frac{15}{4} \frac{R}{M} \mu \left(\frac{4}{15} \frac{c_p M}{R} + \frac{1}{3} \right) \quad (5.179)$$

Com M a massa molecular do fluido, c_p o calor específico a pressão constante, R a constante dos gases perfeitos e μ a viscosidade dinâmica calculada a partir da formulação de Sutherland.

5.7.4. Malhas e estratégias de simulação

Para todas as simulações realizadas foram usadas malhas grosseiras e outras mais refinadas com o mesmo setup de simulação em busca de se fazer um estudo de convergência, ou seja, verificar se a solução é independente da malha. Em geral a malha refinada possui ao menos o dobro dos elementos da malha mais grosseira, por sua vez já fina, a fim de capturar o fenômeno corretamente e buscar estabilidade da solução. As figura 5.17 a 5.20 ilustram as malhas utilizadas.

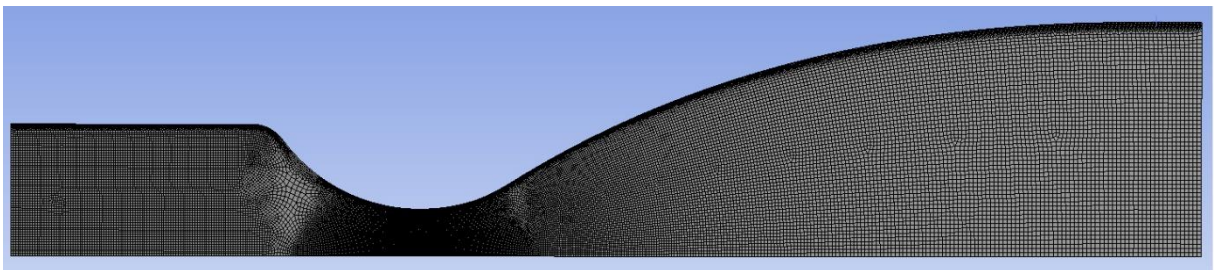


Figura 5.17 – Malha grosseira para o caso do bocal de geometria ótima

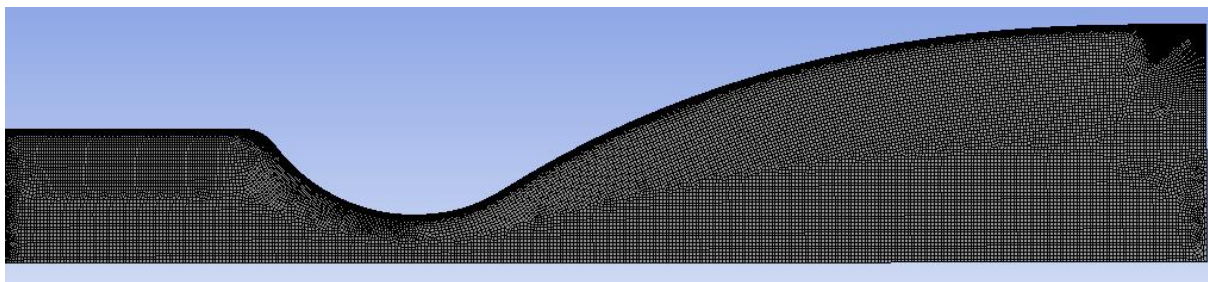


Figura 5.18 – Malha refinada para o caso do bocal de geometria ótima

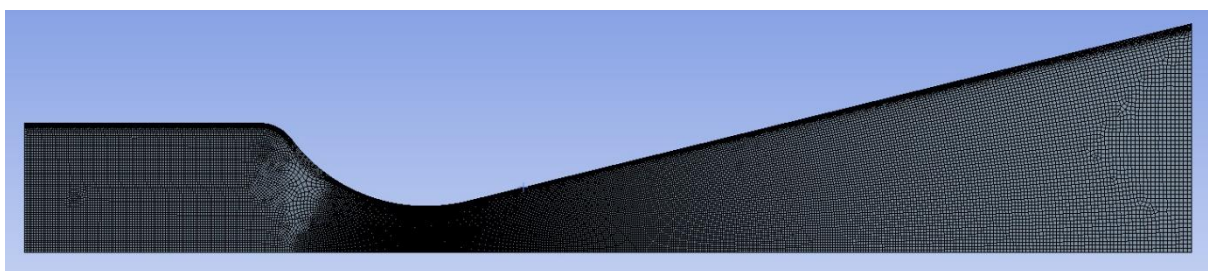


Figura 5.19 – Malha grosseira para o caso do bocal cônico

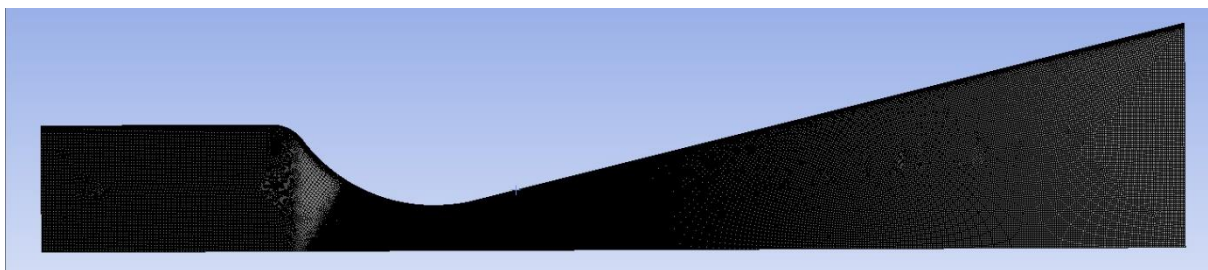


Figura 5.20 – Malha refinada para o caso do bocal cônico

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1. AVALIAÇÃO UNIDIMENSIONAL PRELIMINAR

6.1.1. Pressão no interior da câmara de combustão

Para validação do modelo adotado serão comparadas duas condições tais quais apresentadas em Nieble (1996), o qual trabalhou fazendo a aproximação da variação de pressão no interior da câmara de combustão durante o processo de queima para o caso em regime permanente, com mesmas hipóteses aqui adotadas. Seu trabalho consistiu no ensaio de algumas geometrias de grão bem como condições da câmara de combustão no início deste processo para o caso de um motor-foguete para aplicações agrícolas. No presente estudo somente será levado em conta os casos ensaiados para um grão-propelente de cavidade cilíndrica

6.1.1.1. Caso 1

Para este caso, serão considerado os dados apresentados na tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Dados para o caso 1 do modelo (Nieble, 1996)

Parâmetro	Valor
Diâmetro da garganta do bocal (D_2)	0,003 m
Comprimento do grão-propelente (L)	1,4 m
Pressão de combustão de projeto (P_c)	1250 psi
a	$4,1 \times 10^{-7}$
n	0,65
Massa molar do combustível (M)	207 kg/kmol

Continua

Conclusão da tabela 6.1 – Dados para caso 1 do modelo (Nieble, 1996)

Densidade do propelente (ρ_{comb})	1300 kg/m ³
Razão de calores específicos (k)	1,1
Temperatura de queima (T_c)	1700 K
Incremento de tempo (s)	0,001 s
Raio interno do grão-propelente	0,003 m
Raio externo do grão-propelente	0,009 m

Como resultado da simulação para este caso, utilizando o código desenvolvido para Matlab conforme apresentado no apêndice B, obteve-se o gráfico apresentado na figura 6.1.

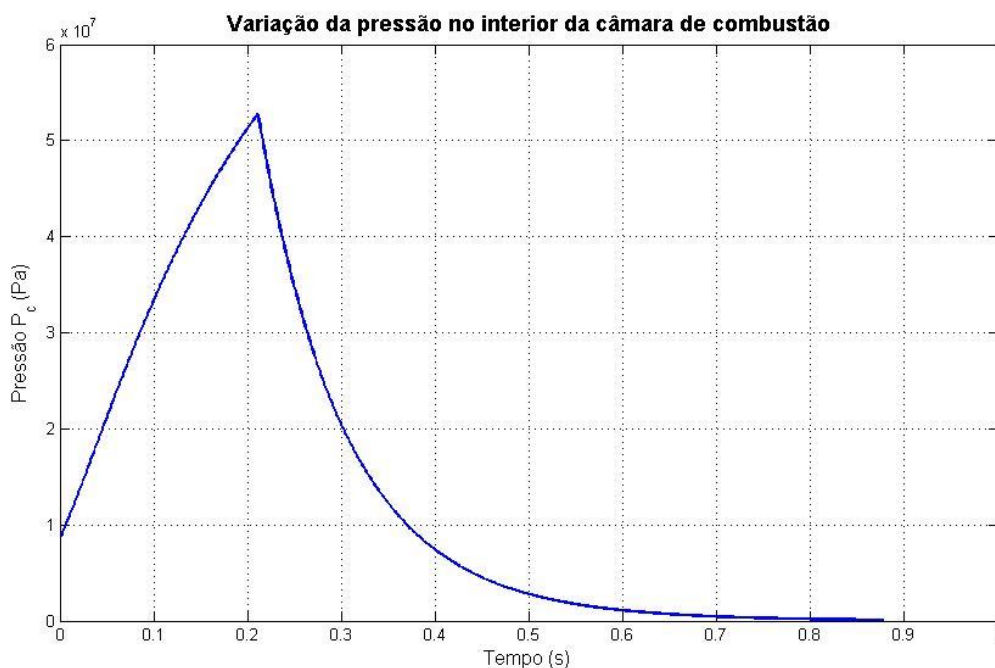


Figura 6.1 – Comportamento da pressão no interior da câmara de combustão em função do tempo de queima do propelente

Comparando os resultados obtidos com aqueles apresentados em Nieble (1996), apresentado na figura 6.2, nota-se alguma variação no que diz respeito ao tempo para se chegar no pico de pressão no interior da câmara de combustão,

sendo no modelo adotado este mais rápido em cerca de 0,15 s, fruto das diferenças de abordagem na modelagem do sistema, tendo em vista que no caso considerado, resolveu-se uma equação diferencial ordinária não-homogênea enquanto em Nieble (1996) foi considerado um modelo já em regime permanente, negligenciando qualquer efeito a massa acumulada no interior da câmara de combustão enquanto se dá o processo. O pico de pressão é razoavelmente próximo em termos relativos, tendo em vista que no caso ensaiado este se dá em torno de 55 MPa enquanto no trabalho de Nieble (1996), 48 MPa. Novamente deve-se levar em conta as diferenças de abordagem na modelagem do fenômeno. No modelo adotado tomou-se como parada o instante em que o escoamento deixa de ocorrer, isto é, quando a câmara de combustão passa a ter somente ar atmosférico em seu interior, o que ocorre em cerca de 0,9 s.

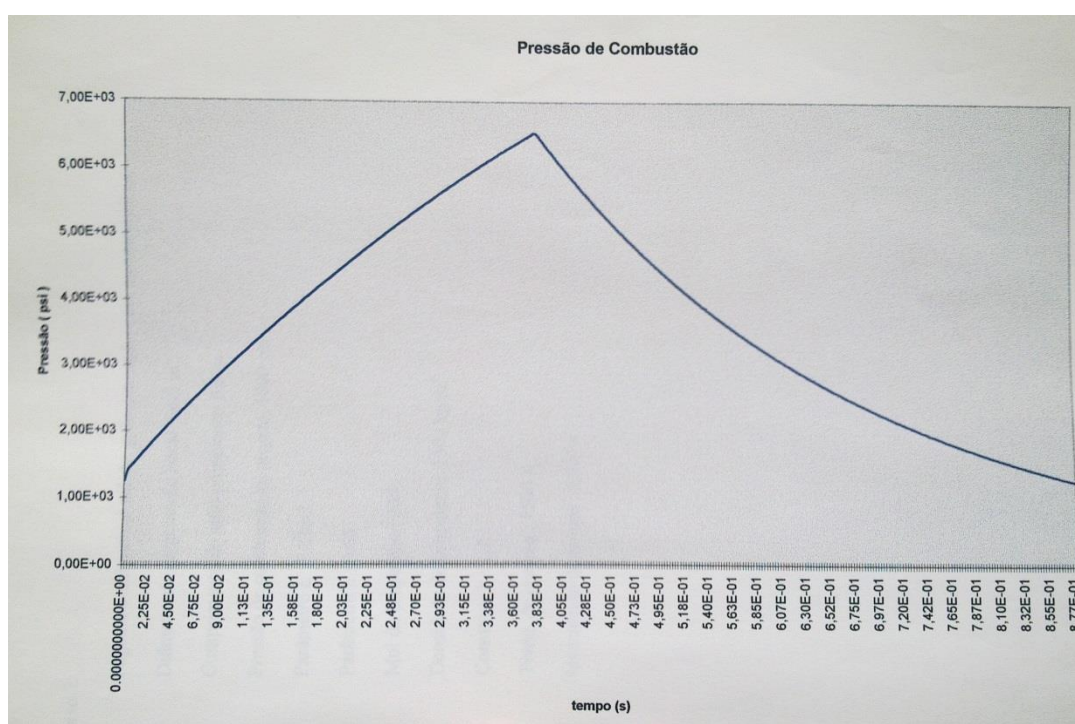


Figura 6.2 – Resultado da variação da pressão no interior da câmara de combustão obtido por Nieble (1996)

Outra fonte de desvio para os valores dos resultados, além da questão de diferenças de modelo, está na conversão do parâmetro a para unidades do Sistema

Internacional de Unidades. Esta foi feita dividindo o valor apresentado em Nieble (1996) por uma constante que faz a conversão entre *pounds per square inch* para Pascal, o que pode ter incorrido em desvios em relação ao valor originalmente apresentado.

6.1.1.2. Caso 2

Para este caso, serão considerado os dados apresentados na tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Dados para o caso 2 do modelo

Parâmetro	Valor
Diâmetro da garganta do bocal (D_2)	0,003 m
Comprimento do grão-propelente (L)	0,6 m
Pressão de combustão de projeto (P_c)	1000 psi
a	$4,1 \times 10^{-7}$
n	0,65
Massa molar do combustível (M)	207 kg/kmol
Densidade do propelente (ρ_{comb})	1300 kg/m ³
Razão de calores específicos (k)	1,1
Temperatura de queima (T_c)	1500 K
Incremento de tempo (s)	0,001 s
Raio interno do grão-propelente	0,005 m
Raio externo do grão-propelente	0,015 m

Como resultado da simulação para este caso, utilizando o código desenvolvido para Matlab conforme apresentado no apêndice B, obteve-se o gráfico apresentado na figura 6.3.

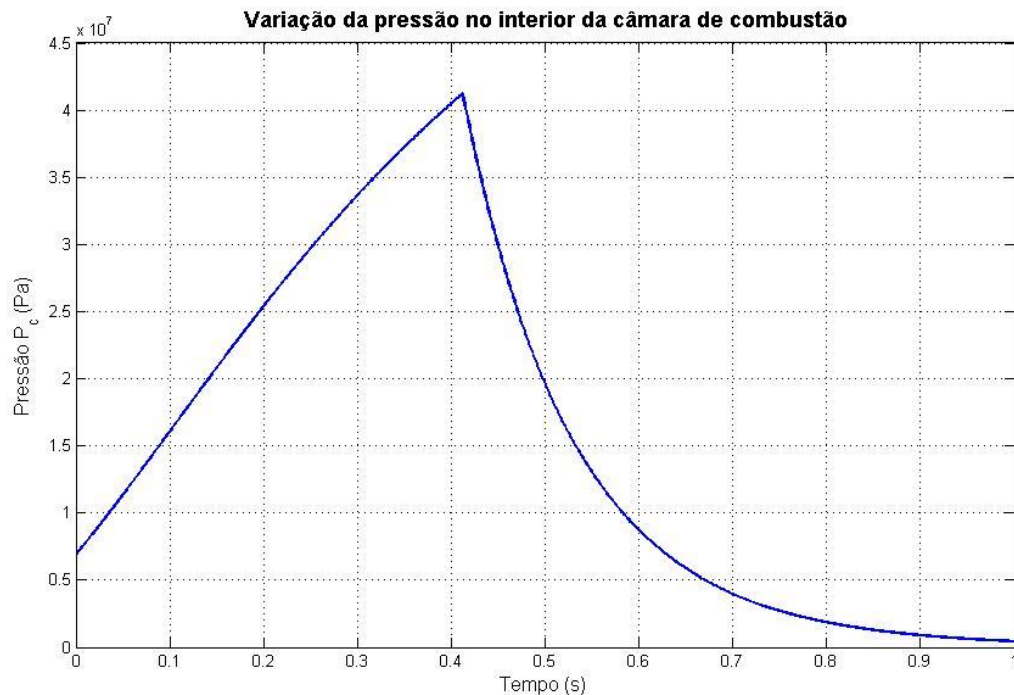


Figura 6.3 – Comportamento da pressão no interior da câmara de combustão em função do tempo de queima do propelente

Novamente, comparando-se com a figura 6.4, o que se nota é concordância de forma, muito embora neste segundo caso o tempo de queima e a pressão apresentem desvios maiores, no caso, 0,3 s até chegar no pico da pressão da câmara que, neste caso está em 42 MPa no modelo adotado comparado a 31 MPa apresentado por Nieble (1996). Novamente a maior causa para o desvio está em conversão de unidades do parâmetro a e, principalmente, nas diferenças entre os modelos adotados.

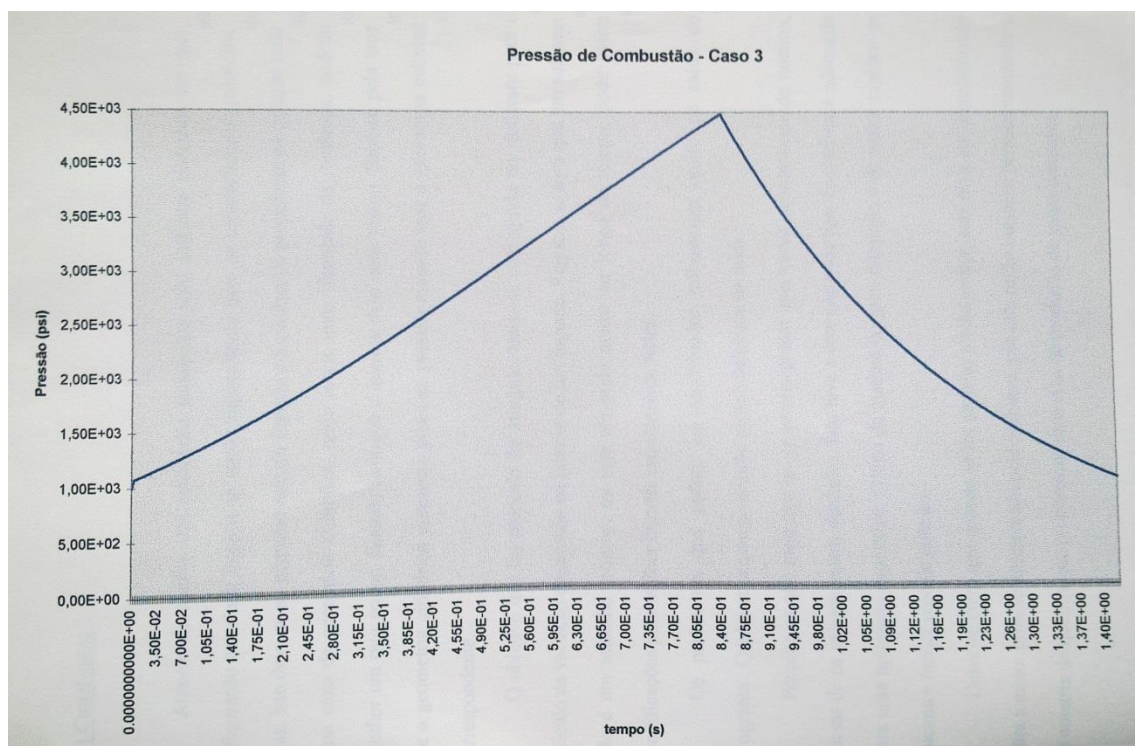


Figura 6.4 – Resultado da variação da pressão no interior da câmara de combustão obtido por Nieble (1996)

Neste segundo caso, dado o maior volume da câmara de combustão acarretado pelo aumento do diâmetro externo, bem como presença de menores pressões iniciais, o que se tem é um tempo maior para a fuga completa dos gases de combustão, sendo esta processada em cerca de 1,2 s.

6.1.2. Empuxo

Seguindo a equação (5.10), simulou-se o empuxo fornecido ao corpo devido a queima do propelente sólido, segundo as curvas ilustradas pelas figuras 6.1 e 6.3. Tal simulação foi realizada para diferentes razões de áreas de seção de saída e da garganta do bocal, supondo este de dimensões fixas, a fim de ilustrar o efeito da variação de área no número de Mach da seção de saída em um bocal convergente-divergente já bloqueado, demonstrando que está maior velocidade de escape dos gases - produtos da combustão – implica em maiores empuxos. Tal unicidade de

número de Mach para uma dada razão de áreas, isto é, este permanece constante dado o bocal estar bloqueado, é demonstrada pela equação

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{M_2}{M_3} \left[\frac{1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) M_3^2}{1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) M_2^2} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Para escoamento de gases perfeitos, em regime permanente e sem perdas.

Analisando a equação (5.10) também se nota que, para uma dada razão de área fixa, a curva de empuxo deve ter a mesma forma que a de pressão, ou seja, há um pico de empuxo para uma dada geometria de bocal e condições de escoamento.

A figura 6.5 apresenta o empuxo para seis razões de áreas diferentes relativos ao caso 1 de simulação. Já a 6.6, para o caso 2.

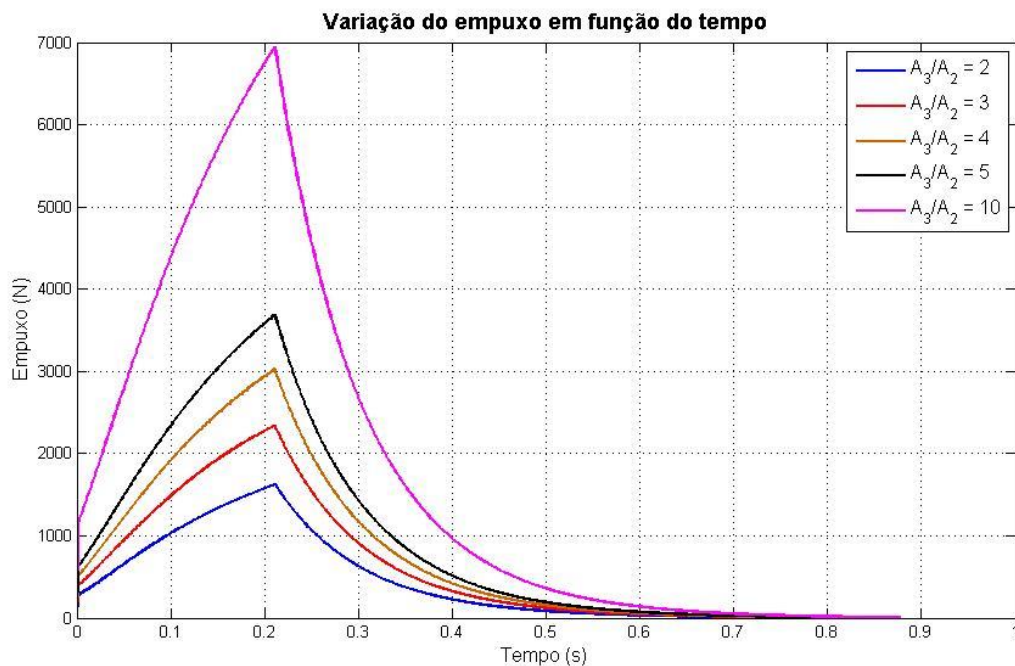


Figura 6.5 – Empuxo em função do tempo de queima para o caso de simulação 1

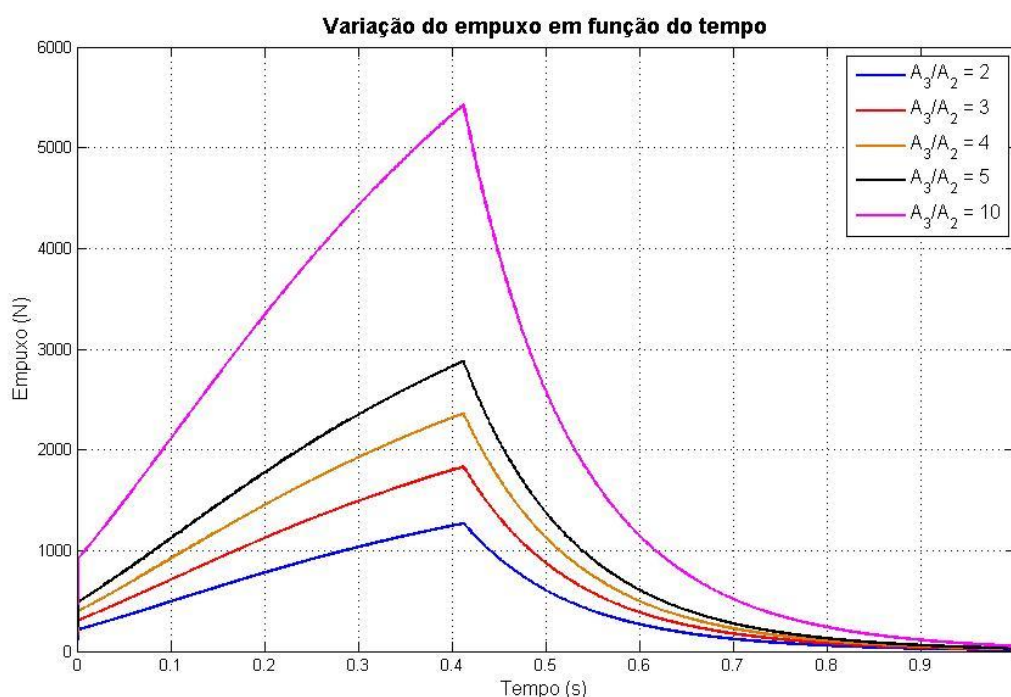


Figura 6.6 – Empuxo em função do tempo de queima para o caso de simulação 2

Da avaliação dos resultados, o que se tem é perfil concordante com aquele da pressão no interior da câmara de combustão, conforme já discutido. Também é notável um maior empuxo para uma maior razão de áreas, efeito este da maior velocidade de escoamento na seção de descarga do bocal, termo este multiplicativo na equação 5.10, o que acarreta em aumento da amplitude.

Do exposto, nota-se que há concordância com relação ao apresentado na bibliografia, conforme pode ser visto para o perfil de um grão propelente tubular apresentado na figura 4.4, também ilustrada em Sutton (2004). Nela há um pico de empuxo em função do tempo, tal como obtido segundo equacionamento apresentado, com queda bastante acentuada após este, isto é, momento em que a pressão no interior da câmara começa a decrescer, momento este em que se tem o início de seu esvaziamento.

6.2. PROJETO BIDIMENSIONAL DO BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE

6.2.1. Projeto da porção supersônica pelo método das características

O primeiro caso, representado pela figura 6.7 ilustra aquele apresentado por Anderson (2003), com os parâmetros listados na tabela 6.3. Tal caso assim como o que se segue tem como escopo garantir que o código utilizado está adequado. Em outras palavras, têm como função validar o código.

Tabela 6.3 – Parâmetros (Anderson, 2003)

Mach na saída (M_s)	2,4
Razão de calores específicos (k)	1,4
Altura da garganta (h_{ini})	1
Nº de características (n)	7
Ângulo inicial (θ_{ini})	$0,375^\circ$

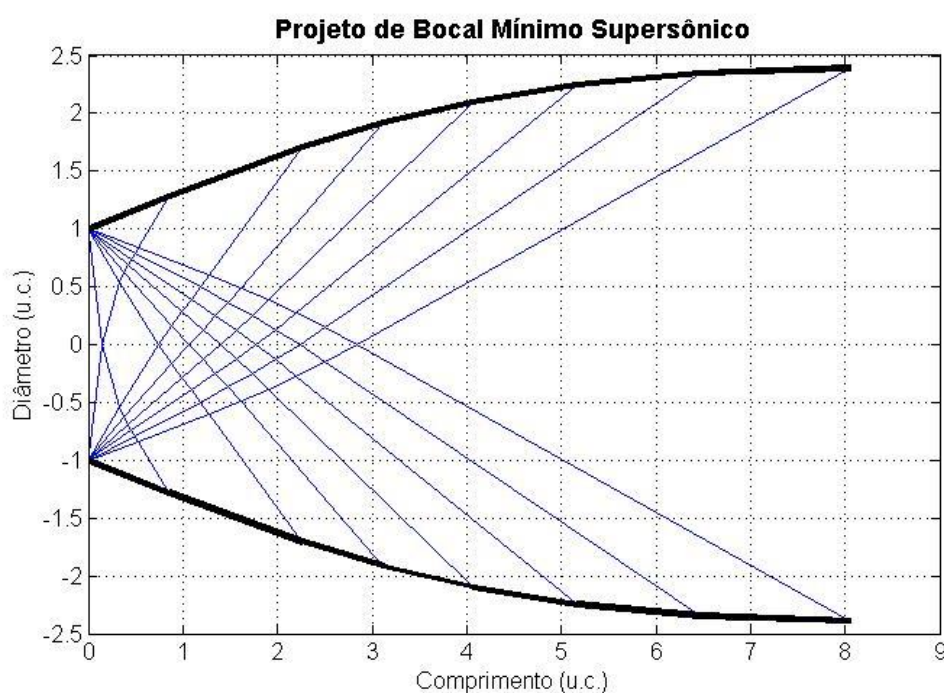


Figura 6.7 – Bocal divergente com parâmetros fornecidos em Anderson (2003)

Tabela 6.4 – Dados calculados pelo programa segundo os valores de entrada da tabela 6.3

<i>Ponto</i>	K_+	K_-	θ	ν	M	μ	x	y
0	-	-	-	-	-	-	0	1
1	0	0,7500	0,3750	0,3750	1,0404	73,9804	0,2492	0
2	0	6,7494	3,3747	3,3747	1,1922	57,0126	0,4540	0,3834
3	0	12,7488	6,3744	6,3744	1,3073	49,9026	0,5261	0,5003
4	0	18,7483	9,3741	9,3741	1,4133	45,0371	0,5826	0,5819
5	0	24,7477	12,3738	12,3738	1,5158	41,2785	0,6325	0,6508
6	0	30,7471	15,3736	15,3736	1,6173	38,1938	0,6793	0,7142
7	0	36,7465	18,3733	18,2733	1,7191	35,5694	0,7244	0,7758
8	0	36,7465	18,3733	18,3733	1,7191	35,5694	1,1708	1,3889
9	-6,7494	6,7494	0	6,7494	1,3209	49,2077	0,7598	0
10	-6,7494	12,7488	2,9997	9,7491	1,4263	44,5183	0,8998	0,1575
11	-6,7494	18,7483	5,9994	12,7488	1,5285	40,8613	1,0118	0,2784
12	-6,7494	24,7477	8,9991	15,7486	1,6300	37,8436	1,1127	0,3860
13	-6,7494	30,7471	11,9988	18,7483	1,7320	35,2667	1,2086	0,4890
14	-6,7494	36,7465	14,9986	21,7480	1,8355	33,0123	1,3028	0,5923
15	-6,7494	36,7465	14,9986	21,7480	1,8355	33,0123	2,3334	1,7373
16	-12,7488	12,7488	0	12,7488	1,5285	40,8613	1,0798	0
17	-12,7488	18,7483	2,9997	15,7486	1,6300	37,8436	1,2279	0,1280
18	-12,7488	24,7477	5,9994	18,7483	1,7320	35,2667	1,3638	0,2464
19	-12,7488	30,7471	8,9991	21,7480	1,8355	33,0123	1,4955	0,3634
20	-12,7488	36,7465	11,9988	24,7477	1,9412	31,0070	1,6268	0,4838
21	-12,7488	36,7465	11,9988	24,7477	1,9412	31,0070	3,1916	1,9434
22	-18,7483	18,7483	0	18,7483	1,7320	35,2667	1,4103	0
23	-18,7483	24,7477	2,9997	21,7480	1,8355	33,0123	1,5814	0,1227
24	-18,7483	30,7471	5,9994	24,7477	1,9412	31,0070	1,7499	0,2474
25	-18,7483	36,7465	8,9991	27,7474	2,0499	29,1975	1,9209	0,3791
26	-18,7483	36,7465	8,9991	27,7474	2,0499	29,1975	4,1300	2,1173
27	-24,7477	24,7477	0	24,7477	1,9412	31,0070	1,7895	0
28	-24,7477	30,7471	2,9997	27,7474	2,0499	29,1975	1,9983	0,1284
29	-24,7477	36,7465	5,9994	30,7471	2,1622	27,5479	2,2135	0,2675
30	-24,7477	36,7465	5,9994	30,7471	2,1622	27,5479	5,2194	2,2607
31	-30,7471	30,7471	0	30,7471	2,1622	27,5479	2,2517	0
32	-30,7471	36,7465	2,9997	33,7468	2,2787	26,0309	2,5173	0,1429
33	-30,7471	36,7465	2,9997	33,7468	2,2787	26,0309	6,5170	2,3628
34	-36,7465	36,7465	0	36,7468	2,4000	24,6247	2,8410	0
35	-36,7465	36,7465	0	36,7468	2,4000	24,6247	8,0855	2,4039

A figura 6.8 bem como a tabela 6.5 foram extraída de Anderson (2003) e trazem a geometria e propriedades do bocal de parâmetros análogos aos adotados para a solução apresentada nas figuras.

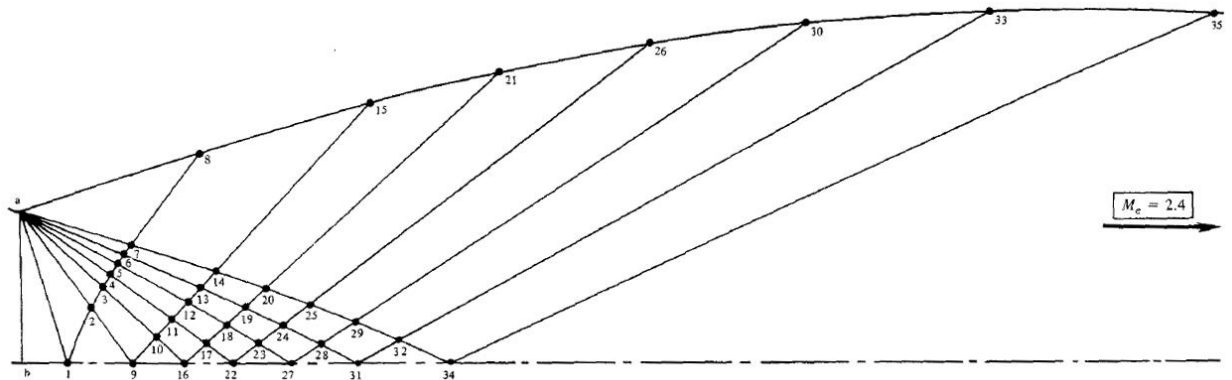


Figura 6.8 – Curvas características de meio bocal plano (Anderson, 2003)

Tabela 6.5 – Valores de cada ponto das características da figura 6.8 (Anderson, 2003)

Point no.	$K_- = \theta + \nu$	$K_+ = \theta - \nu$	$\theta = \frac{1}{2}(K_- + K_+)$	$\nu = \frac{1}{2}(K_- - K_+)$	M	μ
1	0.75	0	0.375 [†]	0.375 [†]	1.04	74.1
2	6.75	0	3.375 [†]	3.375 [†]	1.19	57.2
3	12.75	0	6.375 [†]	6.375 [†]	1.31	49.8
4	18.75	0	9.375 [†]	9.375 [†]	1.41	45.2
5	24.75	0	12.375 [†]	12.375 [†]	1.52	41.1
6	30.75	0	15.375 [†]	15.375 [†]	1.62	38.1
7	36.75	0	18.375 [†]	18.375 [†]	1.72	35.6
8	36.75 [†]	0 [†]			1.72 [†]	35.6 [†]
9	6.75 [†]	-6.75	0 [†]	6.75	1.32	49.3
10	12.75 [†]	-6.75 [†]	3	9.75	1.43	44.4
11	18.75 [†]	-6.75 [†]	6	12.75	1.53	40.8
12	24.75 [†]	-6.75 [†]	9	15.75	1.63	37.8
13	30.75 [†]	-6.75 [†]	12	18.75	1.73	35.3
14	36.75 [†]	-6.75 [†]	15	21.75	1.84	32.9
15	36.75 [†]	-6.75 [†]	15 [†]	21.75 [†]	1.84 [†]	32.9 [†]
16	12.75 [†]	-12.75	0 [†]	12.75	1.53	40.8
17	18.75 [†]	-12.75 [†]	3	15.75	1.63	37.8
18	24.75 [†]	-12.75 [†]	6	18.75	1.73	35.3
19	30.75 [†]	-12.75 [†]	9	21.75	1.84	32.9
20	36.75 [†]	-12.75 [†]	12	24.75	1.94	31.0
21	36.75 [†]	-12.75 [†]	12 [†]	24.75 [†]	1.94 [†]	31.0 [†]
22	18.75 [†]	-18.75	0 [†]	18.75	1.73	35.3
23	24.75 [†]	-18.75 [†]	3	21.75	1.84	32.9
24	30.75 [†]	-18.75 [†]	6	24.75	1.94	31.0
25	36.75 [†]	-18.75 [†]	9	27.75	2.05	29.2
26	36.75 [†]	-18.75 [†]	9 [†]	27.75 [†]	2.05 [†]	29.2 [†]
27	24.75 [†]	-24.75	0 [†]	24.75	1.94	31.0
28	30.75 [†]	-24.75 [†]	3	27.75	2.05	29.2
29	36.75 [†]	-24.75 [†]	6	30.75	2.16	27.6
30	36.75 [†]	-24.75 [†]	6 [†]	30.75 [†]	2.16 [†]	27.6 [†]
31	30.75 [†]	-30.75	0 [†]	30.75	2.16	27.6
32	36.75 [†]	-30.75 [†]	3	33.75	2.28	26.0
33	36.75 [†]	-30.75 [†]	3 [†]	33.75 [†]	2.28 [†]	26.0 [†]
34	36.75 [†]	-36.75	0 [†]	36.75	2.4	24.6
35	36.75 [†]	-36.75 [†]	0 [†]	36.75 [†]	2.4 [†]	24.6 [†]

Do cômputo deste caso, pode-se notar que as linhas características tem distribuição semelhantes, entretanto, somente da análise destas não se pode chegar numa conclusão acerca da consistência dos cálculos, tendo em vista que não se sabe ao certo a precisão com a qual a figura 6.8 foi feita. A melhor alternativa é verificar os valores apresentados nas tabelas 6.3 e 6.5 para cada um dos pontos de encontro entre as linhas características do escoamento interno ao bocal.

É fácil notar a consistência de cada um dos cálculos realizados em comparação com aqueles informados por Anderson (2003). Nota-se que os desvios são na 3ª casa decimal e podem facilmente ser atribuídos aos arredondamentos realizados pelo MatLab durante a rotina de cálculo. Desta forma há indícios fortes de que o modelo proposto para o caso de um bocal plano está adequado para o posterior projeto do contorno do bocal divergente a ser utilizado no modelo de míssil proposto.

O caso que segue está descrito em Hodge (1995). Serão realizados todos os cálculos de forma a garantir completa consistência do programa computacional, já evidenciada pela comparação dos resultados obtidos face àqueles apresentados na bibliografia. Uma vantagem deste segundo caso em análise é o fato de o autor apresentar também as coordenadas de cada um dos pontos, permitindo mais um grau de comparação. A tabela 6.7 e a figura 6.9 apresentam os resultados obtidos com a simulação computacional proposta, enquanto a tabela 6.8 traz os valores dos ângulos notáveis, invariantes de Riemann e posição dos pontos fornecidos por Hodge (1995)

Tabela 6.6 – Parâmetros (Hodge, 1995)

Mach na saída (M_s)	1.92
Razão de calores específicos (k)	1,4
Altura da garganta (h_{ini})	1
Nº de características (n)	7
Ângulo inicial (θ_{ini})	0,075°

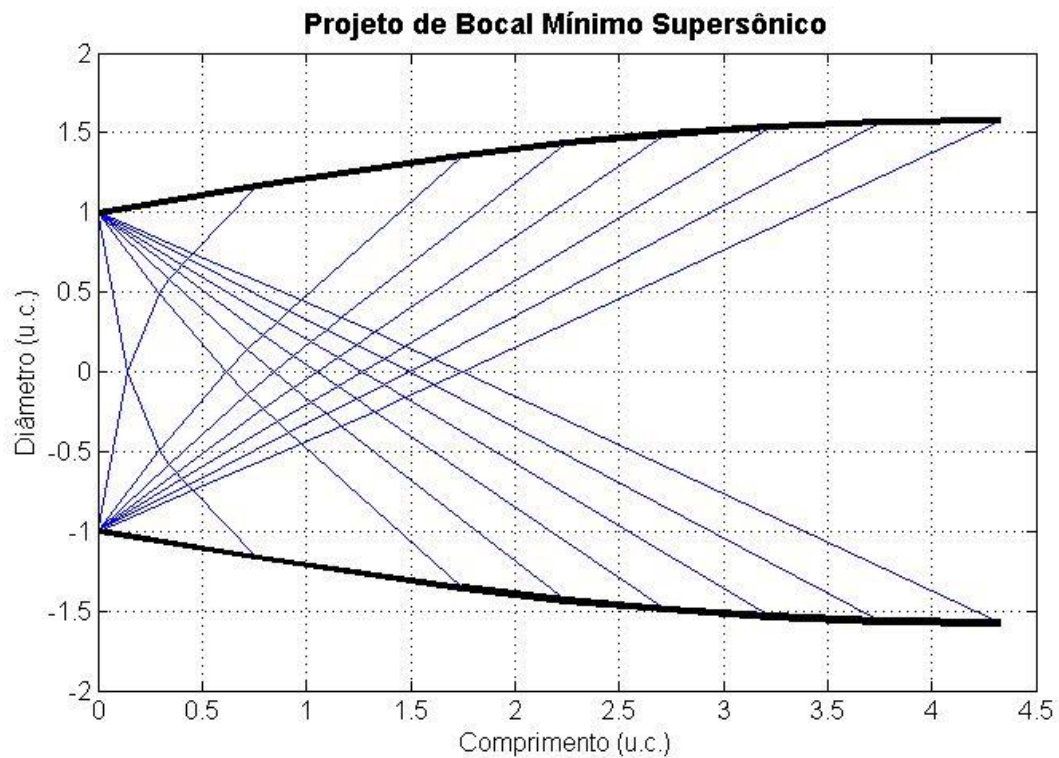


Figura 6.9 – Bocal divergente com parâmetros fornecidos em Hodge (1995)

Tabela 6.7 – Dados calculados pelo programa segundo os valores de entrada da tabela 6.5

Ponto	K_+	K_-	θ	ν	M	μ	x	y
0	-	-	-	-	-	-	0	1
1	0	0,1500	0,075	0,0750	1,0101	81,9010	0,1436	0
2	0	4,1501	2,075	2,0750	1,1357	61,7066	0,2961	0,4948
3	0	8,1502	4,0751	4,0751	1,2205	55,0204	0,3418	0,5788
4	0	13,1503	6,0751	6,0751	1,2963	50,4795	0,3754	0,6323
5	0	16,1504	8,0752	8,0752	1,3680	46,9682	0,4039	0,6742
6	0	20,1505	10,0752	10,0752	1,4375	44,0800	0,4295	0,7102
7	0	24,1506	12,0753	12,0753	1,5057	41,6164	0,4534	0,7430
8	0	24,1506	12,0753	12,0753	1,5057	41,6164	0,7620	1,1630
9	-4,1501	4,1501	0	4,1501	1,2234	54,8226	0,6146	0
10	-4,1501	8,1502	2,0000	6,1501	1,2991	50,3325	0,7164	0,1380
11	-4,1501	13,1503	4,0001	8,1502	1,3707	46,8501	0,7929	0,2344
12	-4,1501	16,1504	6,0001	10,1502	1,4401	43,9808	0,8583	0,3236
13	-4,1501	20,1505	8,0002	12,1503	1,5083	41,5305	0,9177	0,3838
14	-4,1501	24,1506	10,0002	14,1503	1,5759	39,3861	0,9736	0,4492

Continua

Conclusão da Tabela 6.6 - Dados calculados pelo programa segundo os valores de entrada da tabela 6.5

15	-4,1501	24,1506	10,0002	14,1503	1,5759	39,3861	1,7513	1,3560
16	-8,1501	8,1502	0	8,1502	1,3707	46,8501	0,8424	0
17	-8,1501	13,1503	2,0000	10,1502	1,4401	43,9808	0,9387	0,1012
18	-8,1501	16,1504	4,0001	12,1503	1,5083	41,5305	1,0221	0,1867
19	-8,1501	20,1505	6,0001	14,1502	1,5759	39,3861	1,0985	0,2644
20	-8,1501	24,1506	8,0002	16,1504	1,6436	37,4762	1,1709	0,3379
21	-8,1501	24,1506	8,0002	16,1504	1,6436	37,4762	2,2499	1,4350
22	-12,1503	13,1503	0	12,1503	1,5083	41,5305	1,0520	0
23	-12,1503	16,1504	2,0000	14,1503	1,5759	39,3861	1,1513	0,0877
24	-12,1503	20,1505	4,0001	16,1504	1,6436	37,4762	1,2432	0,1688
25	-12,1503	24,1506	6,0001	18,1504	1,7116	35,7510	1,3310	0,2468
26	-16,1504	24,1506	6,0001	18,1504	1,7116	35,7510	2,7279	1,4937
27	-16,1504	16,1504	0	16,1504	1,6436	37,4762	1,2659	0
28	-16,1504	20,1505	2,0000	18,1504	1,7116	35,7510	1,3730	0,0825
29	-16,1504	24,1506	4,0001	20,1505	1,7801	34,1783	1,4763	0,1631
30	-16,1504	24,1506	4,0001	20,1505	1,7801	24,1783	3,2236	1,5370
31	-20,1505	20,1505	0	20,1505	1,7801	34,1783	1,4955	0
32	-20,1505	24,1506	2,0000	22,1505	1,8495	32,7304	1,6147	0,0817
33	-20,1505	24,1506	2,0000	22,1505	1,8495	32,7304	3,7541	1,5648
34	-24,1506	24,1506	0	24,1506	1,9200	31,3888	1,7504	0
35	-24,1506	24,1506	0	24,1506	1,9200	31,3888	4,3316	1,5749

A despeito do valor inicial do número de Mach que possui um desvio e implica em desvios na posição dos primeiros pontos, todos os demais estão apresentados de forma bastante consistência no que diz respeito a aqueles calculados por Hodge (1995). A questão do primeiro número de Mach está relacionada a metodologia utilizada para seu cômputo através do método de Newton-Raphson que requereu um chute inicial. Desta forma se inadequado a raiz da função apresentada pode divergir em relação ao valor que se esperava. Conforme dito, entretanto, o desvio não foi significativo e permitiu obtenção de um bocal divergente de comprimento mínimo se não igual, bastante consistente com àquele apresentado na bibliografia.

Tabela 6.8 – Solução de Hodge (1995) (a definição de K+ e K- em Hodge é invertida quando comparada a Anderson, 2003)

Point	K ⁺	K ⁻	θ	ν	M	μ	x	y
a	—	—	—	—	—	—	0.000	1.000
1	0.151	0.000	0.075	0.075	1.014	80.409	0.170	0.000
2	4.151	0.000	2.075	2.075	1.136	61.667	0.318	0.458
3	8.151	0.000	4.075	4.075	1.221	55.004	0.367	0.548
4	12.151	0.000	6.075	6.075	1.297	50.470	0.403	0.605
5	16.151	0.000	8.075	8.075	1.368	46.963	0.434	0.650
6	20.151	0.000	10.075	10.075	1.438	44.077	0.461	0.689
7	24.151	0.000	12.075	12.075	1.506	41.614	0.487	0.724
8	24.151	0.000	12.075	12.075	1.506	41.614	0.818	1.175
9	4.151	-4.151	0.000	4.151	1.224	54.806	0.613	0.000
10	8.151	-4.151	2.000	6.151	1.299	50.323	0.715	0.138
11	12.151	-4.151	4.000	8.151	1.371	46.844	0.792	0.235
12	16.151	-4.151	6.000	10.151	1.440	43.977	0.857	0.314
13	20.151	-4.151	8.000	12.151	1.508	41.528	0.917	0.384
14	24.151	-4.151	10.000	14.151	1.576	39.384	0.973	0.450
15	24.151	-4.151	10.000	14.151	1.576	39.384	1.751	1.357
16	8.151	-8.151	0.000	8.151	1.371	46.844	0.842	0.000
17	12.151	-8.151	2.000	10.151	1.440	43.977	0.938	0.101
18	16.151	-8.151	4.000	12.151	1.508	41.528	1.022	0.187
19	20.151	-8.151	6.000	14.151	1.576	39.384	1.098	0.265
20	24.151	-8.151	8.000	16.151	1.644	37.474	1.170	0.338
21	24.151	-8.151	8.000	16.151	1.644	37.474	2.250	1.436
22	12.151	-12.151	0.000	12.151	1.508	41.528	1.052	0.000
23	16.151	-12.151	2.000	14.151	1.576	39.384	1.151	0.088
24	20.151	-12.151	4.000	16.151	1.644	37.474	1.243	0.169
25	24.151	-12.151	6.000	18.151	1.712	35.750	1.331	0.247
26	24.151	-12.151	6.000	18.151	1.712	35.750	2.729	1.495
27	16.151	-16.151	0.000	16.151	1.644	37.474	1.266	0.000
28	20.151	-16.151	2.000	18.151	1.712	35.750	1.373	0.083
29	24.151	-16.151	4.000	20.151	1.780	34.177	1.476	0.163
30	24.151	-16.151	4.000	20.151	1.780	34.177	3.225	1.538
31	20.151	-20.151	0.000	20.151	1.780	34.177	1.495	0.000
32	24.151	-20.151	2.000	22.151	1.850	32.729	1.615	0.082
33	24.151	-20.151	2.000	22.151	1.850	32.729	3.756	1.566
34	24.151	-24.151	0.000	24.151	1.920	31.388	1.750	0.000
35	24.151	-24.151	0.000	24.151	1.920	31.388	4.334	1.576

É de alguma valia calcular as razões de área para este bocal tanto com a expressão já desenvolvida em Zucker (1977) bem como com os valores obtidos a partir da simulação computacional, assumindo o bocal com seções circulares, e verificar o quão próximos eles são.

$$\frac{A_{saída}}{A_{garganta}} = \frac{M_{garganta}}{M_{saída}} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_{saída}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_{saída}^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

A tabela 6.8 apresenta o resultado dos cálculos

Tabela 6.9 – Comparação da razão de áreas calculada para o caso unidimensional e bidimensional

	Fórmula Zucker (1977)	Calculado
Anderson (2003)	2,4031	5,7787
Hodge (1995)	1,5804	2.4803

Nota-se que há um grande desvio em relação aquele valor calculado para o caso unidimensional isentrópico e aquele para o caso bidimensional a partir de técnica que envolve a hipótese de escoamento potencial. Naturalmente espera-se que os valores calculados para o caso bidimensional sejam mais consistentes do que aqueles para o caso unidimensional dadas as simplificações demasiadas supostas para o cômputo do último, como por exemplo descontar os efeitos do contato das ondas de Mach com as paredes. Também vale ressaltar que o bocal unidimensional em nada garante um bocal de mínimo comprimento, mas tão somente um cálculo preliminar da razão de áreas para que o valor do número de Mach na saída seja atingido.

Tais análises permitem afirmar com boa segurança que o programa desenvolvido é geral para a geração de geometria e cômputo das propriedades internas de um bocal divergente de comprimento mínimo. Vale ressaltar, conforme já citado na revisão da bibliografia, que a abordagem aqui utilizada é a mesma apresentada por Shapiro (1953) na qual se faz a separação do escoamento interno dentro do bocal tal como na análise de um fôlio. Isto quer dizer que para a malha interna assume-se um escoamento irrotacional, isentrópico, isto é, potencial. Enquanto todos os efeitos viscosos e térmicos são investigados na camada limite aderida a parede interna do bocal.

6.3. ESCOAMENTO TRANSIENTE EM BOCAL QUASE-UNIDIMENSIONAL

6.3.1. Validação do modelo

A fim de validar o modelo adotado para a solução do escoamento num bocal quase-unidimensional, conforme apresentado na seção 5.3 do presente relatório, simular-se-á o mesmo caso apresentado no capítulo 7 de Anderson (1995). Para este caso as condições iniciais estão listadas na tabela 6.10 junto com demais parâmetros de referência.

Tabela 6.10 – Parâmetros do modelo apresentado por Anderson (1995) para um bocal quase-unidimensional

Condições iniciais	$\rho_i^0 = 1 - 0,3146x$
	$T_i^0 = 1 - 0,2314x$
	$V_i^0 = (0,1 + 1,09x)\sqrt{T_i^0}$
Comprimento do bocal	$L = 3,0 \text{ m}$
Número de intervalos no comprimento	$n = 30$
Razão de calores específicos	$k = 1,4$
Variação da área	$A(x) = 1 + 2,2(x - 1,5)^2$
Número de iterações	1400
Número de Courant	0,5

Antes de apresentar os resultados numéricos vale demonstrar que a solução é consistente em todos os pontos do domínio desde o transiente até chegar no regime permanente. As figuras 6.10, 6.11 e 6.12 ilustram, respectivamente, a temperatura, densidade e velocidade adimensionais em todos os pontos do domínio fluido adotado.

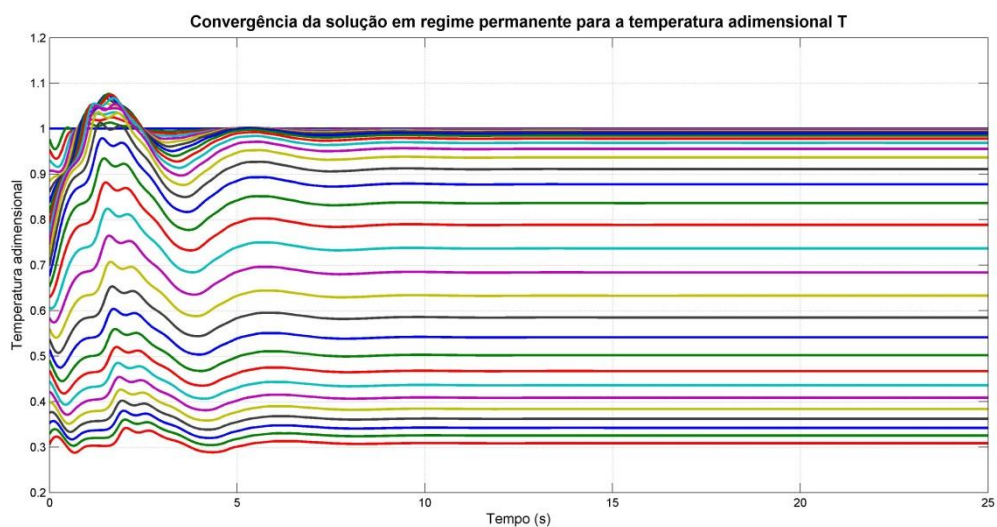


Figura 6.10 – Variação da temperatura adimensional em cada ponto do domínio fluido ao longo da simulação

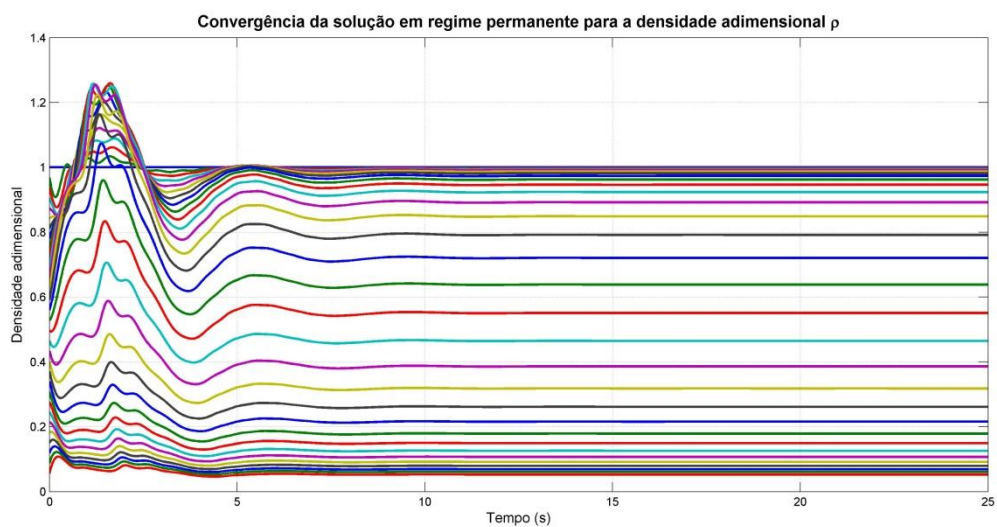


Figura 6.11 – Variação da densidade adimensional em cada ponto do domínio fluido ao longo da simulação

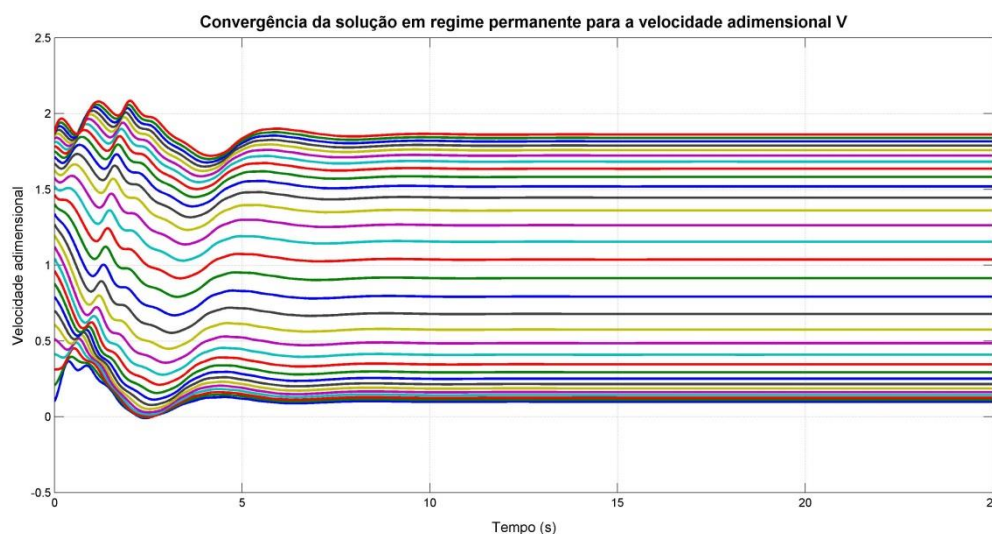


Figura 6.12 – Variação da densidade adimensional em cada ponto do domínio fluído ao longo da simulação

Dos gráficos apresentados nota-se que o regime permanente é de fato atingido em cada ponto da malha fluída, isto é representado pelas linhas horizontais contínuas e invariantes após os 6s. O transiente da densidade é bastante elevado para os nós da malha mais próximos do bocal, indicando que as condições iniciais adotadas não são tão próximas assim do que se espera em regime permanente, além de levar em consideração a inclusão das condições de contorno que, a cada iteração, alteram o valor das propriedades ao longo do escoamento. O fato de as condições iniciais divergirem um pouco do regime permanente permite visualizar que, de fato a solução para o problema adequa o escoamento ao longo do bocal até atingir um estado em que as propriedades são constantes. Isto valida a hipótese de que a solução proposta é válida para a simulação do problema de esvaziamento da câmara de combustão.

Expostas estas conclusões acerca do comportamento geral da solução ao longo do tempo, passa a ser possível comparar os dados obtidos com a simulação em comparação com aqueles tabulados em Anderson (1995). As tabelas 6.11, 6.13 e 6.15 ilustram os resultados obtidos a partir do código para Matlab escrito no instante inicial, após o primeiro passo temporal e após 1400 passos de tempo, já as tabelas 6.12, 6.14 e 6.16 foram extraídas diretamente de Anderson (1995).

Tabela 6.11 – Resultados obtidos pelo autor a partir da simulação do caso exposto no capítulo 7 de Anderson (1995) para o instante 0 de simulação

I	x/L	A/A*	ρ/ρ_0	V/a ₀	T/T ₀	p/p ₀	M	Vazão
1	0	5.950	1.000	0.103	1.000	1.000	0.103	0.610
2	0.100	5.312	0.969	0.207	0.977	0.946	0.209	1.063
3	0.200	4.718	0.937	0.311	0.954	0.894	0.318	1.373
4	0.300	4.168	0.906	0.412	0.931	0.843	0.427	1.555
5	0.400	3.662	0.874	0.511	0.907	0.793	0.536	1.635
6	0.500	3.200	0.843	0.607	0.884	0.745	0.645	1.636
7	0.600	2.782	0.811	0.700	0.861	0.699	0.754	1.579
8	0.700	2.408	0.780	0.790	0.838	0.653	0.863	1.483
9	0.800	2.078	0.748	0.877	0.815	0.610	0.972	1.364
10	0.900	1.792	0.717	0.962	0.792	0.568	1.081	1.236
11	1.000	1.550	0.685	1.043	0.769	0.527	1.190	1.108
12	1.100	1.352	0.654	1.122	0.746	0.487	1.299	0.992
13	1.200	1.198	0.623	1.197	0.722	0.450	1.408	0.892
14	1.300	1.088	0.591	1.269	0.699	0.413	1.517	0.816
15	1.400	1.022	0.560	1.337	0.676	0.378	1.626	0.765
16	1.500	1.000	0.528	1.402	0.653	0.345	1.735	0.740
17	1.600	1.022	0.497	1.463	0.630	0.313	1.844	0.743
18	1.700	1.088	0.465	1.521	0.607	0.282	1.953	0.770
19	1.800	1.198	0.434	1.575	0.584	0.253	2.062	0.818
20	1.900	1.352	0.402	1.625	0.560	0.225	2.171	0.884
21	2.000	1.550	0.371	1.671	0.537	0.199	2.280	0.960
22	2.100	1.792	0.339	1.713	0.514	0.174	2.389	1.041
23	2.200	2.078	0.308	1.750	0.491	0.151	2.498	1.120
24	2.300	2.408	0.276	1.783	0.468	0.129	2.607	1.187
25	2.400	2.782	0.245	1.811	0.445	0.109	2.716	1.234
26	2.500	3.200	0.214	1.834	0.422	0.090	2.825	1.253
27	2.600	3.662	0.182	1.852	0.398	0.073	2.934	1.234
28	2.700	4.168	0.151	1.864	0.375	0.057	3.043	1.170
29	2.800	4.718	0.119	1.870	0.352	0.042	3.152	1.051
30	2.900	5.312	0.088	1.870	0.329	0.029	3.261	0.871
31	3.000	5.950	0.056	1.870	0.306	0.017	3.382	0.625

Tabela 6.12 – Resultados expostos no capítulo 7 de Anderson (1995) para o instante 0 de simulação

$\frac{x}{L}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{V}{a_0}$	$\frac{T}{T_0}$
0	5.950	1.000	0.100	1.000
0.1	5.312	0.969	0.207	0.977
0.2	4.718	0.937	0.311	0.954
0.3	4.168	0.906	0.412	0.931
0.4	3.662	0.874	0.511	0.907
0.5	3.200	0.843	0.607	0.884
0.6	2.782	0.811	0.700	0.861
0.7	2.408	0.780	0.790	0.838
0.8	2.078	0.748	0.877	0.815
0.9	1.792	0.717	0.962	0.792
1.0	1.550	0.685	1.043	0.769
1.1	1.352	0.654	1.122	0.745
1.2	1.198	0.622	1.197	0.722
1.3	1.088	0.591	1.268	0.699
1.4	1.022	0.560	1.337	0.676
1.5	1.000	0.528	1.402	0.653
1.6	1.022	0.497	1.463	0.630
1.7	1.088	0.465	1.521	0.607
1.8	1.198	0.434	1.575	0.583
1.9	1.352	0.402	1.625	0.560
2.0	1.550	0.371	1.671	0.537
2.1	1.792	0.339	1.713	0.514
2.2	2.078	0.308	1.750	0.491
2.3	2.408	0.276	1.783	0.468
2.4	2.782	0.245	1.811	0.445
2.5	3.200	0.214	1.834	0.422
2.6	3.662	0.182	1.852	0.398
2.7	4.168	0.151	1.864	0.375
2.8	4.718	0.119	1.870	0.352
2.9	5.312	0.088	1.870	0.329
3.0	5.950	0.056	1.864	0.306

Tabela 6.13 – Resultados obtidos pelo autor a partir da simulação do caso exposto no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1º passo de simulação

I	x/L	A/A*	ρ/ρ_0	V/a ₀	T/T ₀	p/p ₀	M	Vazão
1	0	5.950	1.000	0.112	1.000	1.000	0.112	0.663
2	0.100	5.312	0.955	0.212	0.972	0.928	0.215	1.073
3	0.200	4.718	0.927	0.312	0.950	0.881	0.320	1.363
4	0.300	4.168	0.900	0.411	0.929	0.836	0.427	1.542
5	0.400	3.662	0.872	0.508	0.908	0.792	0.534	1.623
6	0.500	3.200	0.845	0.603	0.886	0.748	0.640	1.629
7	0.600	2.782	0.817	0.695	0.865	0.706	0.747	1.578
8	0.700	2.408	0.789	0.784	0.843	0.665	0.853	1.489
9	0.800	2.078	0.760	0.870	0.822	0.625	0.960	1.375
10	0.900	1.792	0.731	0.954	0.800	0.585	1.067	1.250
11	1.000	1.550	0.701	1.035	0.778	0.545	1.174	1.125
12	1.100	1.352	0.670	1.113	0.755	0.506	1.281	1.008
13	1.200	1.198	0.637	1.188	0.731	0.466	1.389	0.907
14	1.300	1.088	0.603	1.260	0.707	0.426	1.498	0.827
15	1.400	1.022	0.568	1.328	0.682	0.387	1.609	0.770
16	1.500	1.000	0.531	1.394	0.656	0.349	1.720	0.740
17	1.600	1.022	0.495	1.456	0.631	0.312	1.833	0.736
18	1.700	1.088	0.459	1.514	0.605	0.278	1.945	0.756
19	1.800	1.198	0.425	1.568	0.581	0.247	2.058	0.798
20	1.900	1.352	0.392	1.619	0.556	0.218	2.170	0.858
21	2.000	1.550	0.361	1.666	0.533	0.192	2.282	0.931
22	2.100	1.792	0.330	1.709	0.510	0.168	2.393	1.012
23	2.200	2.078	0.301	1.748	0.487	0.146	2.504	1.092
24	2.300	2.408	0.271	1.782	0.465	0.126	2.614	1.164
25	2.400	2.782	0.242	1.813	0.443	0.107	2.724	1.220
26	2.500	3.200	0.213	1.838	0.421	0.090	2.834	1.252
27	2.600	3.662	0.184	1.858	0.398	0.073	2.944	1.250
28	2.700	4.168	0.154	1.874	0.376	0.058	3.055	1.206
29	2.800	4.718	0.125	1.884	0.354	0.044	3.167	1.110
30	2.900	5.312	0.095	1.889	0.332	0.032	3.280	0.955
31	3.000	5.950	0.066	1.894	0.309	0.020	3.404	0.738

Tabela 6.14 – Resultados expostos no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1º passo de simulação

I	$\frac{x}{L}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{V}{a_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	M
1	0.000	5.950	1.000	0.111	1.000	1.000	0.111
2	0.100	5.312	0.955	0.212	0.972	0.928	0.215
3	0.200	4.718	0.927	0.312	0.950	0.881	0.320
4	0.300	4.168	0.900	0.411	0.929	0.836	0.427
5	0.400	3.662	0.872	0.508	0.908	0.791	0.534
6	0.500	3.200	0.844	0.603	0.886	0.748	0.640
7	0.600	2.782	0.817	0.695	0.865	0.706	0.747
8	0.700	2.408	0.789	0.784	0.843	0.665	0.854
9	0.800	2.078	0.760	0.870	0.822	0.625	0.960
10	0.900	1.792	0.731	0.954	0.800	0.585	1.067
11	1.000	1.550	0.701	1.035	0.778	0.545	1.174
12	1.100	1.352	0.670	1.113	0.755	0.506	1.281
13	1.200	1.198	0.637	1.188	0.731	0.466	1.389
14	1.300	1.088	0.603	1.260	0.707	0.426	1.498
15	1.400	1.022	0.567	1.328	0.682	0.387	1.609
16	1.500	1.000	0.531	1.394	0.656	0.349	1.720
17	1.600	1.022	0.494	1.455	0.631	0.312	1.833
18	1.700	1.088	0.459	1.514	0.605	0.278	1.945
19	1.800	1.198	0.425	1.568	0.581	0.247	2.058
20	1.900	1.352	0.392	1.619	0.556	0.218	2.171
21	2.000	1.550	0.361	1.666	0.533	0.192	2.282
22	2.100	1.792	0.330	1.709	0.510	0.168	2.393
23	2.200	2.078	0.301	1.748	0.487	0.146	2.504
24	2.300	2.408	0.271	1.782	0.465	0.126	2.614
25	2.400	2.782	0.242	1.813	0.443	0.107	2.724
26	2.500	3.200	0.213	1.838	0.421	0.090	2.834
27	2.600	3.662	0.184	1.858	0.398	0.073	2.944
28	2.700	4.168	0.154	1.874	0.376	0.058	3.055
29	2.800	4.718	0.125	1.884	0.354	0.044	3.167
30	2.900	5.312	0.095	1.890	0.332	0.032	3.281
31	3.000	5.950	0.066	1.895	0.309	0.020	3.406

Tabela 6.15 – Resultados obtidos pelo autor a partir da simulação do caso exposto no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1400º passo de simulação

I	x/L	A/A*	ρ/ρ_0	V/a ₀	T/T ₀	p/p ₀	M	Vazão
1	0	5.950	1.000	0.099	1.000	1.000	0.099	0.590
2	0.100	5.312	0.998	0.112	0.999	0.997	0.112	0.594
3	0.200	4.718	0.997	0.125	0.999	0.996	0.125	0.588
4	0.300	4.168	0.994	0.143	0.998	0.992	0.143	0.591
5	0.400	3.662	0.992	0.162	0.997	0.988	0.162	0.589
6	0.500	3.200	0.987	0.187	0.995	0.982	0.187	0.589
7	0.600	2.782	0.982	0.215	0.993	0.974	0.216	0.588
8	0.700	2.408	0.974	0.251	0.989	0.963	0.252	0.588
9	0.800	2.078	0.963	0.294	0.985	0.948	0.296	0.587
10	0.900	1.792	0.947	0.346	0.978	0.926	0.350	0.587
11	1.000	1.550	0.924	0.409	0.969	0.895	0.416	0.586
12	1.100	1.352	0.892	0.485	0.956	0.853	0.496	0.585
13	1.200	1.198	0.849	0.575	0.937	0.795	0.594	0.585
14	1.300	1.088	0.792	0.678	0.911	0.722	0.710	0.584
15	1.400	1.022	0.721	0.793	0.878	0.633	0.846	0.584
16	1.500	1.000	0.639	0.914	0.836	0.534	0.999	0.584
17	1.600	1.022	0.551	1.037	0.789	0.434	1.167	0.584
18	1.700	1.088	0.465	1.155	0.737	0.342	1.345	0.584
19	1.800	1.198	0.386	1.263	0.684	0.264	1.528	0.585
20	1.900	1.352	0.318	1.361	0.633	0.201	1.710	0.585
21	2.000	1.550	0.262	1.446	0.585	0.153	1.890	0.586
22	2.100	1.792	0.216	1.519	0.541	0.117	2.065	0.587
23	2.200	2.078	0.179	1.582	0.502	0.090	2.233	0.588
24	2.300	2.408	0.150	1.636	0.467	0.070	2.394	0.589
25	2.400	2.782	0.126	1.683	0.436	0.055	2.549	0.590
26	2.500	3.200	0.107	1.723	0.408	0.044	2.696	0.591
27	2.600	3.662	0.092	1.759	0.384	0.035	2.839	0.591
28	2.700	4.168	0.080	1.789	0.362	0.029	2.972	0.593
29	2.800	4.718	0.069	1.817	0.342	0.024	3.106	0.591
30	2.900	5.312	0.061	1.839	0.325	0.020	3.225	0.596
31	3.000	5.950	0.053	1.862	0.308	0.016	3.353	0.586

Tabela 6.16 – Resultados expostos no capítulo 7 de Anderson (1995) para o 1400º passo de simulação

I	$\frac{x}{L}$	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{V}{a_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{p}{p_0}$	M	\dot{m}
1	0.000	5.950	1.000	0.099	1.000	1.000	0.099	0.590
2	0.100	5.312	0.998	0.112	0.999	0.997	0.112	0.594
3	0.200	4.718	0.997	0.125	0.999	0.996	0.125	0.589
4	0.300	4.168	0.994	0.143	0.998	0.992	0.143	0.591
5	0.400	3.662	0.992	0.162	0.997	0.988	0.163	0.589
6	0.500	3.200	0.987	0.187	0.995	0.982	0.187	0.589
7	0.600	2.782	0.982	0.215	0.993	0.974	0.216	0.588
8	0.700	2.408	0.974	0.251	0.989	0.963	0.252	0.588
9	0.800	2.078	0.963	0.294	0.985	0.948	0.296	0.587
10	0.900	1.792	0.947	0.346	0.978	0.926	0.350	0.587
11	1.000	1.550	0.924	0.409	0.969	0.895	0.416	0.586
12	1.100	1.352	0.892	0.485	0.956	0.853	0.496	0.585
13	1.200	1.198	0.849	0.575	0.937	0.795	0.594	0.585
14	1.300	1.088	0.792	0.678	0.911	0.722	0.710	0.584
15	1.400	1.022	0.721	0.793	0.878	0.633	0.846	0.584
16	1.500	1.000	0.639	0.914	0.836	0.534	0.099	0.584
17	1.600	1.022	0.551	1.037	0.789	0.434	1.167	0.584
18	1.700	1.088	0.465	1.155	0.737	0.343	1.345	0.584
19	1.800	1.198	0.386	1.263	0.684	0.264	1.528	0.585
20	1.900	1.352	0.318	1.361	0.633	0.201	1.710	0.586
21	2.000	1.550	0.262	1.446	0.585	0.153	1.890	0.587
22	2.100	1.792	0.216	1.519	0.541	0.117	2.065	0.588
23	2.200	2.078	0.179	1.582	0.502	0.090	2.233	0.589
24	2.300	2.408	0.150	1.636	0.467	0.070	2.394	0.590
25	2.400	2.782	0.126	1.683	0.436	0.055	2.549	0.590
26	2.500	3.200	0.107	1.723	0.408	0.044	2.696	0.591
27	2.600	3.662	0.092	1.759	0.384	0.035	2.839	0.591
28	2.700	4.168	0.079	1.789	0.362	0.029	2.972	0.592
29	2.800	4.718	0.069	1.817	0.342	0.024	3.105	0.592
30	2.900	5.312	0.061	1.839	0.325	0.020	3.225	0.595
31	3.000	5.950	0.053	1.862	0.308	0.016	3.353	0.585

Comparando os valores entre o caso simulado e os dados de Anderson nota-se, se muito, variações na terceira casa decimal dos valores apresentados pelas tabelas 6.11 a 6.14, atribuindo-se isso ao modo de truncamento numérico. Em regime permanente, caso das tabelas 6.15 e 6.16, os valores são idênticos para todos os pontos apresentados. Esta análise revela que o código escrito está de acordo com a teoria explicitada e captura bem o fenômeno apresentado. Com isto, procede-se para a validação do escoamento através da geometria apresentada na seção 5.4.

6.3.2. Aplicação a uma geometria de bocal especificada

Para o teste do esvaziamento da câmara de combustão, utilizou-se como combustível Ballistile (mistura de nitroglicerina com nitrocelulose) com as propriedades tais como encontradas em TU Delft (2014), listadas na tabela 6.17. Adicionalmente, considerou-se um bocal com a variação de área aproximada por um polinômio de 2º grau capaz de atingir Mach 3,4 nesta seção de descarga. O comprimento da câmara de combustão foi assumido como 2m e seu diâmetro de 0,24m. Todos os parâmetros físicos estão listados na tabela 6.18.

Tabela 6.17 – Dados da combustão de Ballistile (TU Delft, 2014)

Propriedade	Valor
Temperatura adiabática de chama	3125 K
Densidade do propelente	1620 kg/m ³
Taxa de queima (<i>a</i> 98,1 bar)	21,4 mm/s
Massa molar dos gases de combustão	26,4 kg/kmol
Razão de calores específicos	1,215

Tabela 6.18 – Dados físicos do problema

Propriedade	Valor
Variação da área (adimensional)	$(232,1658x^2 - 31,6083x + 2)$
Comprimento da câmara de combustão	2 m
Diâmetro da câmara de combustão	0,24 m
Volume livre inicial	0,000635 m ³
Comprimento do bocal	0,278 m
Nº de elementos na malha fluída	101

Uma dificuldade foi imposta pelo combustível. Como o dado de taxa de queima encontrado somente correspondia a pressão de 98,1 bar, foi necessário calcular a constante *de* queima para este caso bem como assumir o coeficiente de pressão *n* próximo aos dos demais combustíveis verificados. Vale ressaltar que isto

pode levar a incongruências tendo em vista que esta estimativa leva em conta que os logaritmos de pressão e taxa de queima relacionam-se através de uma função de 1º grau para todas as pressões e temperatura, o que não corresponde à realidade, de caráter muito mais complexo e variável.

As figuras 6.13 a 6.15 ilustram a convergência da solução. Nota-se que há um rápido período transiente para enfim se chegar no regime permanente para cada uma das variáveis. Atribuem-se os grandes gradientes na acomodação da velocidade adimensionalizada pelo fato de os valores iniciais para esta terem sido adotados longe da solução em regime permanente.

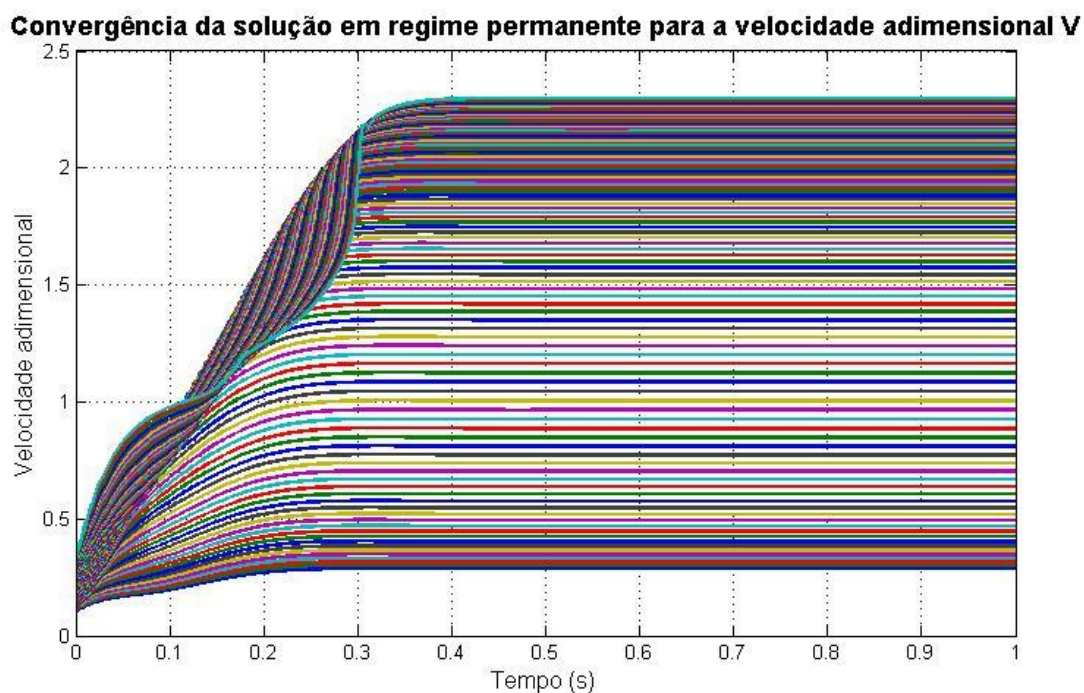


Figura 6.13 – Convergência da variável velocidade adimensional

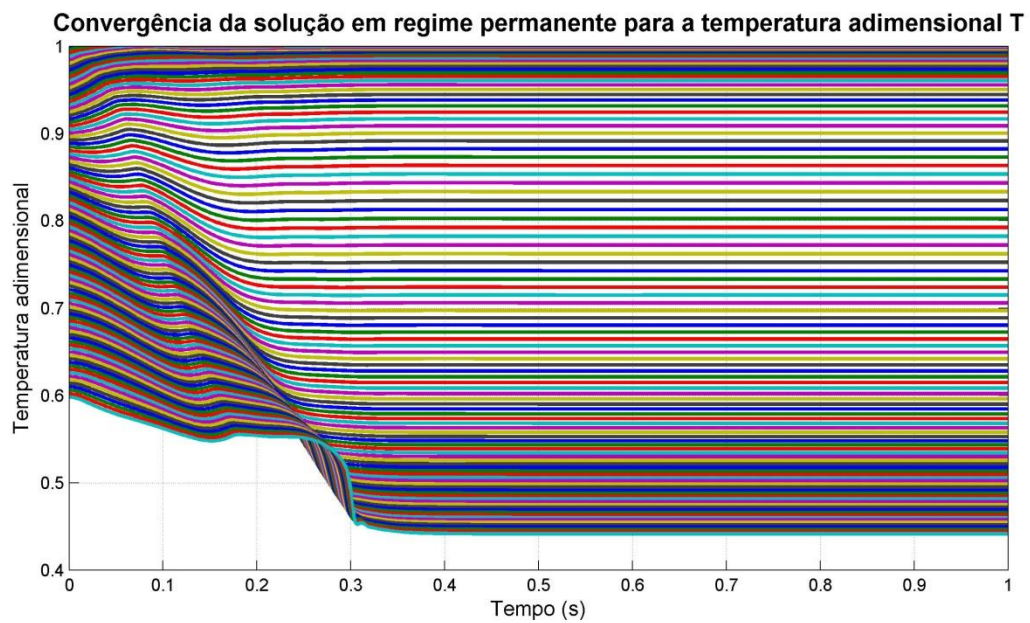


Figura 6.14 – Convergência da variável temperatura adimensional

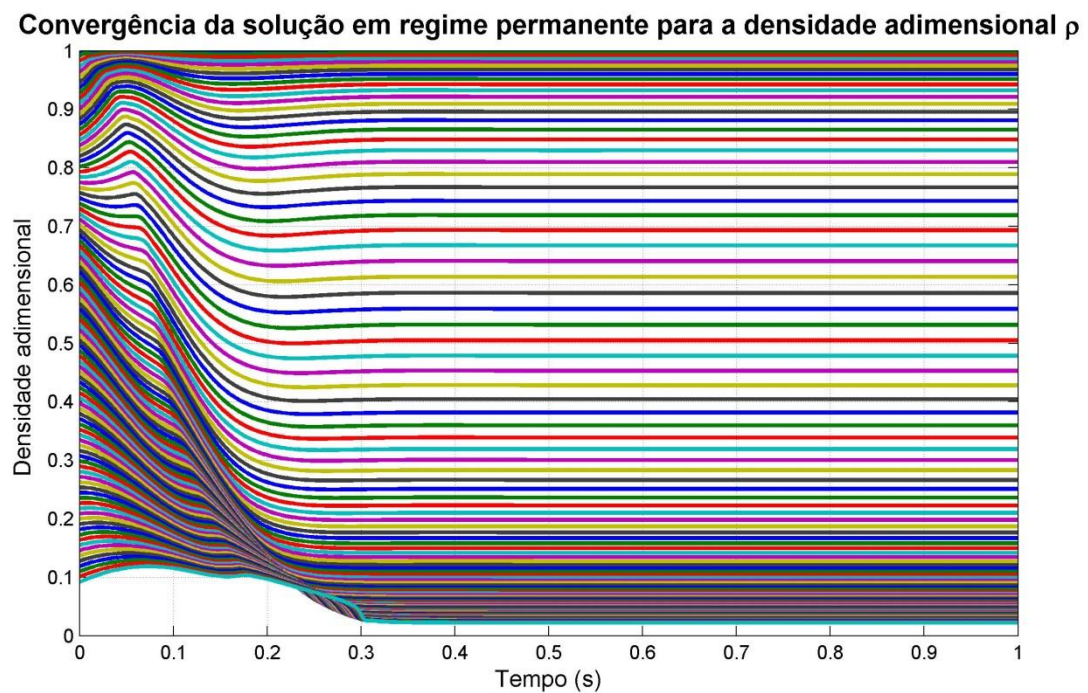


Figura 6.15 – Convergência da variável densidade adimensional

Com isto, apresenta-se o gráfico da variação da pressão da câmara de combustão em função do tempo de queima através da figura 6.16.

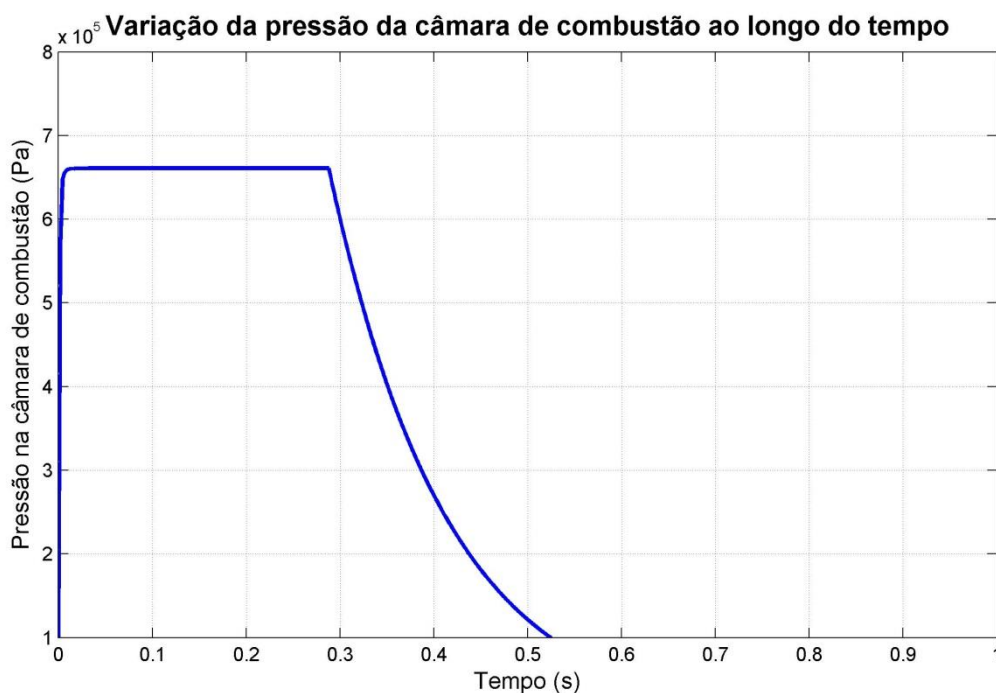


Figura 6.16 – Variação da pressão no interior da câmara de combustão com o tempo

Da figura 6.16 nota-se que o perfil da variação da pressão está adequado quando comparado a bibliografia. Entretanto a pressão máxima atingida (7 bar) está aquém daquela típica de câmaras de combustão do tipo em análise. Duas hipóteses foram levantadas para explicar este comportamento: o grande volume da câmara de combustão que, quando esvaziada, bem como um mau dimensionamento do bocal que permite maior vazão mássica do que o necessário para manter algum gás no interior da câmara e assim acarretar um aumento de pressão. Outro ponto de discordância, na opinião do autor, é o tempo de queima. Como as pressões envolvidas são baixas, a expectativa seria de uma maior demora neste processo que dá cabo em menos de 0,5 s. A isto atribui-se as estimativas feitas para o coeficiente e expoente da taxa de queima do combustível, não necessariamente válidos para as pressões em questão ou para a temperatura da câmara de combustão adotada ($T_c = 2500\text{ K}$).

6.4. DIMENSIONAMENTO DO BOCAL

O dimensionamento do bocal foi feito com base na aplicação do modelo proposto para o esvaziamento da câmara de combustão para os casos dos propelentes KNDX, KNSB Fino e KNSU, misturas mistura de KNO_3 e Dextrose, KNO_3 e Sorbitol e KNO_3 e sacarose, respectivamente, com razão de oxidante e combustível de 65% e 35 %, respectivamente. Esta mesma bibliografia traz dados empíricos sobre a taxa de queima destes propelentes, listadas na tabela 6.19.

Tabela 6.19 – Taxa de queima do KNDX (Nakka Rocketry, 2013)

			a	n
Pressão (MPa)		r (m/s)		
KNDX				
0,100	a	0,779	0,0024	$2 \cdot 10^{-6}$
0,779	a	2,572	0,0076	$-6 \cdot 10^{-9}$
2,572	a	5,930	0,0050	$2 \cdot 10^{-7}$
5,930	a	8,502	0,0149	$-2 \cdot 10^{-8}$
8,502	a	11,20	0,0084	$5 \cdot 10^{-8}$
KNSB				
0,101	a	0,807	0,0029	$2 \cdot 10^{-6}$
0,807	a	1,503	0,0116	$-3 \cdot 10^{-7}$
1,502	a	3,792	0,0079	$-5 \cdot 10^{-9}$
3,792	a	7,033	0,0055	$1 \cdot 10^{-7}$
7,033	a	10,67	0,0104	$7 \cdot 10^{-9}$
KNSU				
0.101	a	10.30	0,0082	$9 \cdot 10^{-8}$

Tabela 6.20 – Propriedades do KNDX, KNSB fino e KNSU (Nakka Rocketry, 2013)

Propelente	ρ (kg/m^3)	k	M (kg/kmol)	T_c (K)	Composição
KNDX	1879	1,131	42,39	1710	KNO_3 e dextrose
KNSB	1841	1,136	39,90	1600	KNO_3 e sorbitol
KNSU	1889	1,133	41,98	1720	KNO_3 e sacarose

Definindo o diâmetro da garganta como 28,7 mm e um grão-propelente misto entre o tipo cigarro e cilindro vazado queimando tanto no interior quanto em suas extremidades, com comprimento de 610 mm, diâmetro externo de 76 mm e interno

de 20 mm, obteve-se a variação de pressão e de empuxo tal como observado pelas figuras 6.17 e 6.18.

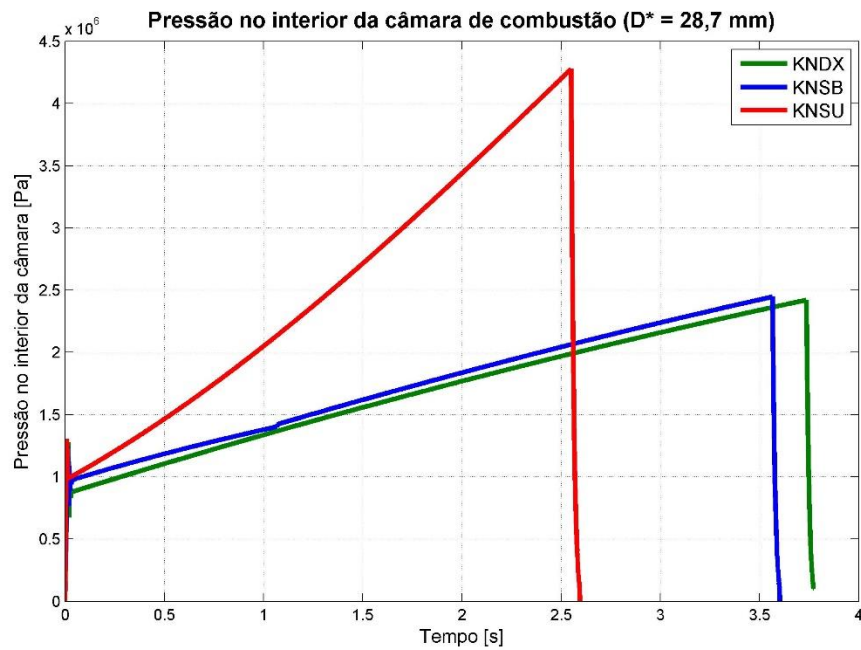


Figura 6.17 – Variação da pressão no interior da câmara de combustão

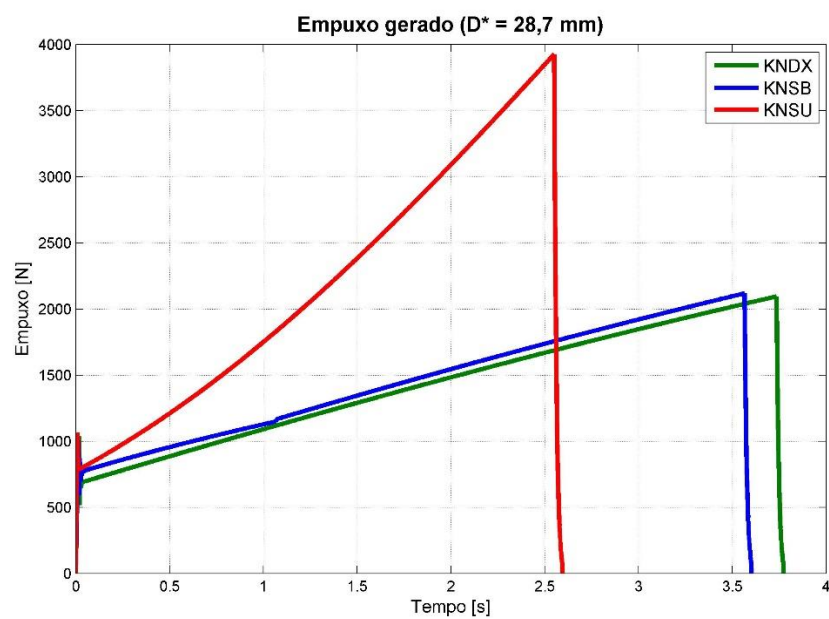


Figura 6.18 – Variação do empuxo

Destes resultados, tem-se que o número de Mach na saída é 2,518. Utilizando-se este bem como a razão de calores específicos e adotando o total de 70 linhas características, o perfil da porção supersônica foi obtido conforme evidenciado pela figura 6.19.

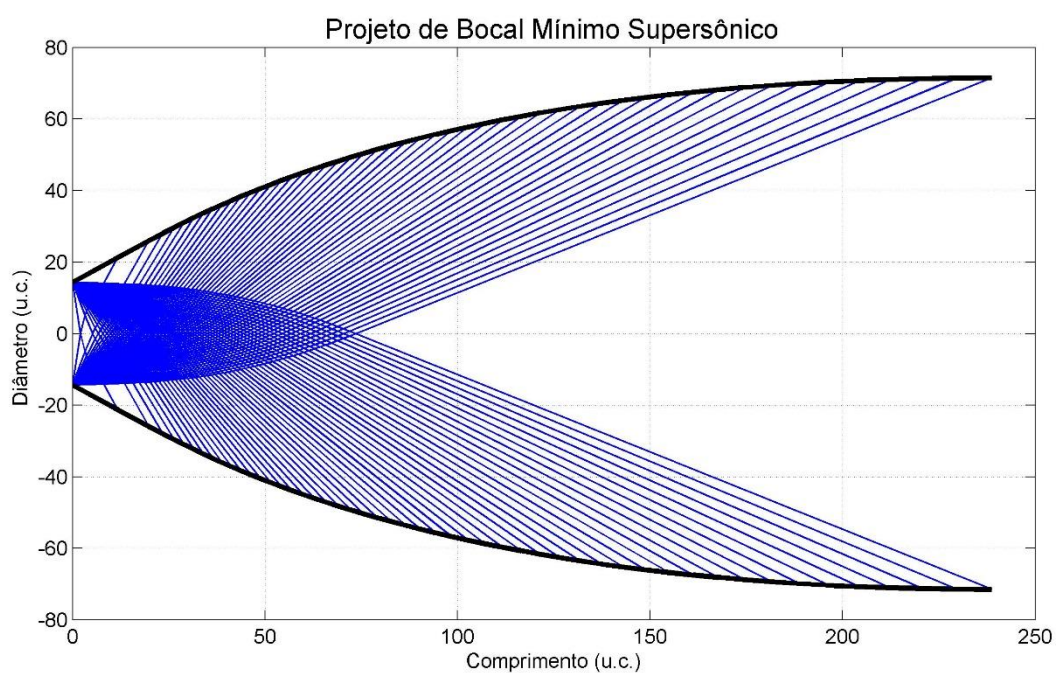


Figura 6.19 – Perfil do bocal supersônico

6.5. ESTUDO DO EFEITO DA VISCOSIDADE EM BOCAIS CONVERGENTES-DIVERGENTES

Seguem os resultados obtidos a partir das simulações dos casos já discutidos acerca de geometrias distintas de bocais supersônicos para o míssil. Todas as simulações foram realizadas segundo as condições de contorno listadas na tabela

6.21, a exceção dos valores dos parâmetros turbulentos no tratamento do fluido como não-viscoso.

Tabela 6.21 – Condições de contorno

Região	Condições de Contorno
Entrada	$p_{comb} = 2500 \text{ MPa}$ $T_{comb} = 1350 \text{ K}$ $I_{turb} = 0,001\%$ $l_{turb} = 0,0056$
Saída	$p_{comb} = 101,325 \text{ kPa}$ $T_{comb} = 300 \text{ K}$ $I_{turb} = 0,022\%$ $l_{turb} = 0,01 \text{ m}$
Parede	Parede adiabática e parada
Simetria	Somente meio bocal é simulado para reduzir o esforço computacional

6.5.1. Perfis de velocidade

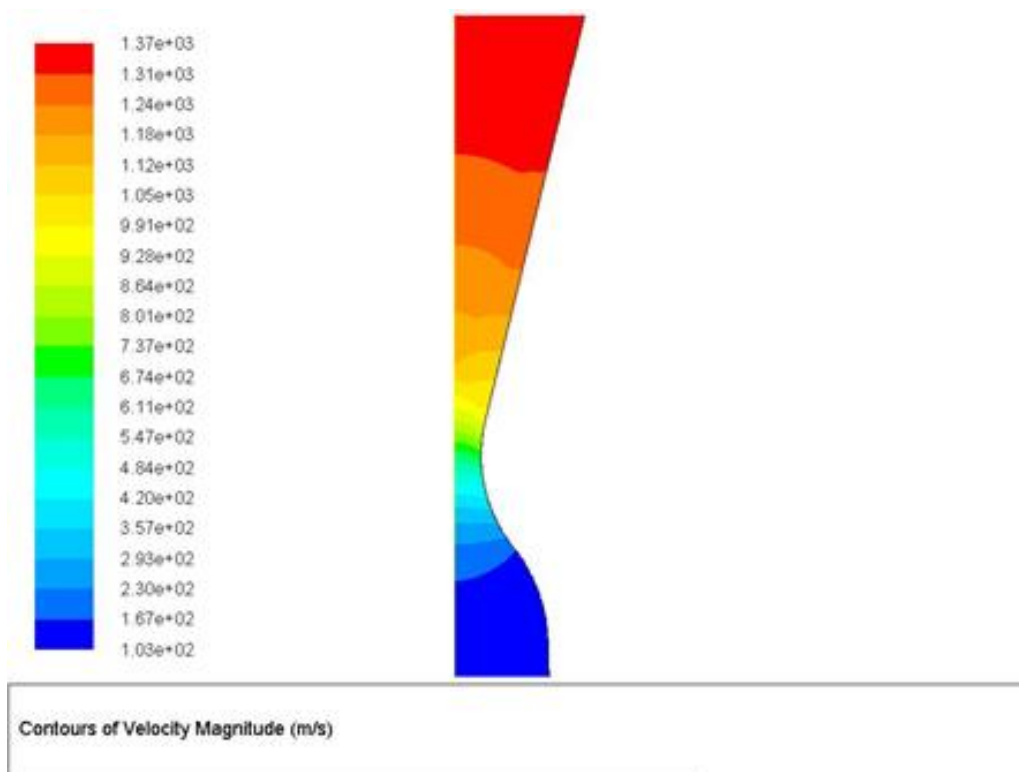


Figura 6.20 – Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa

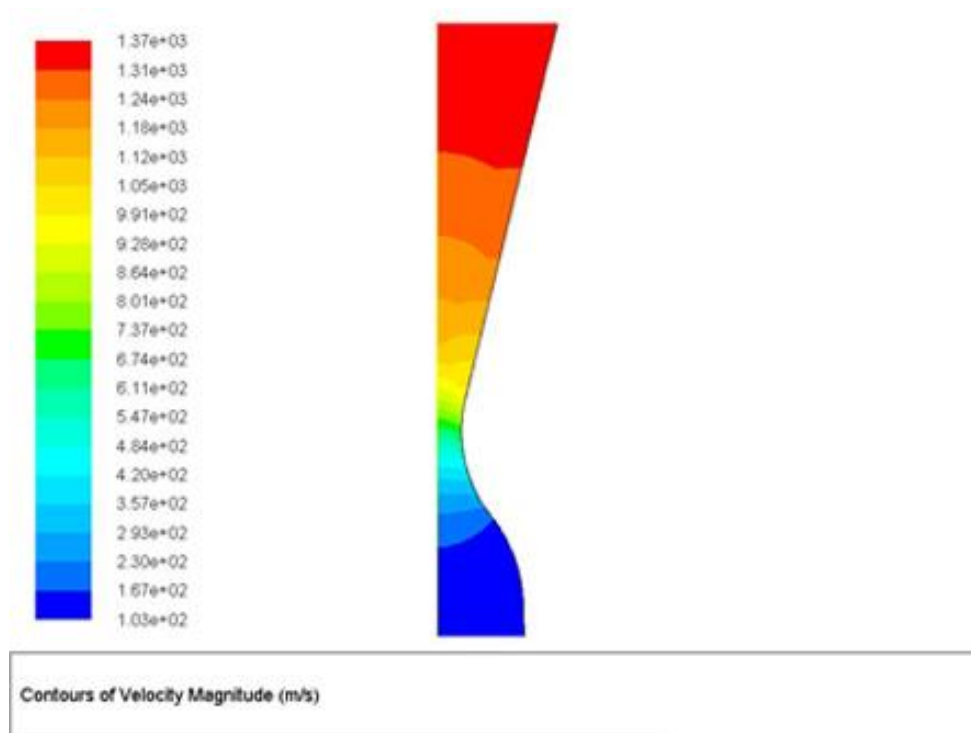


Figura 6.21 – Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina

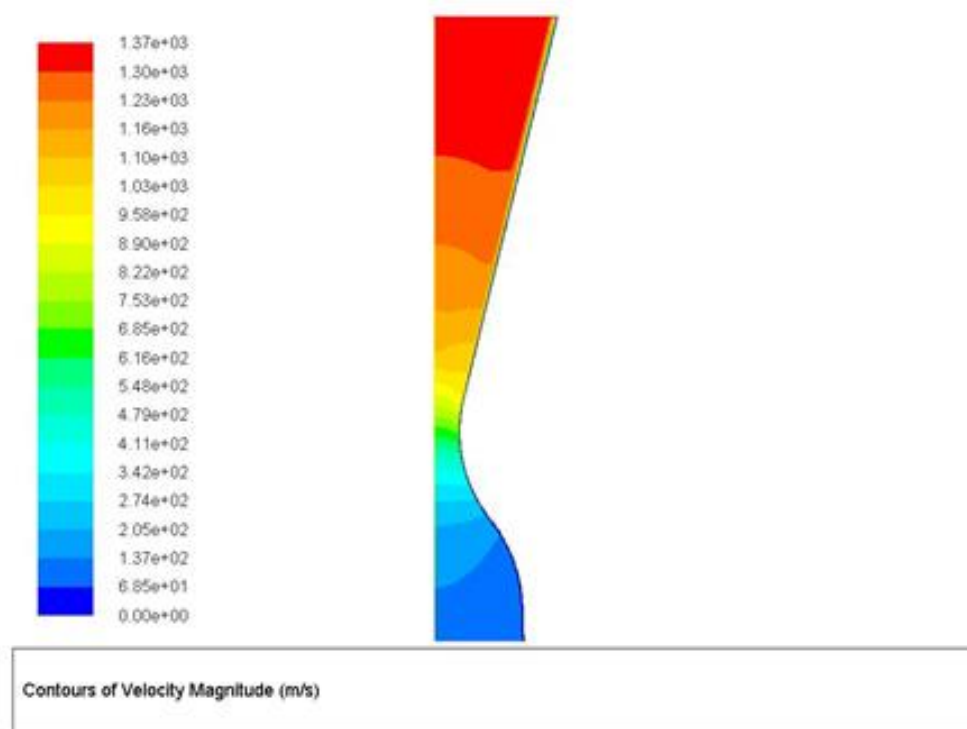


Figura 6.22 – Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa

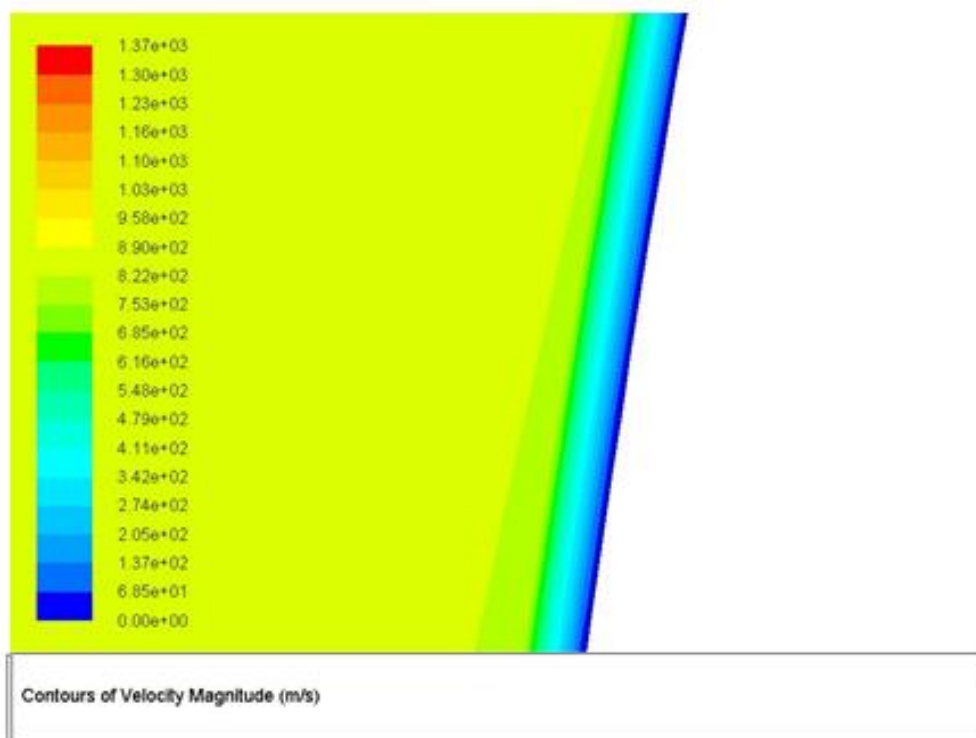


Figura 6.23 – Detalhe do perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa

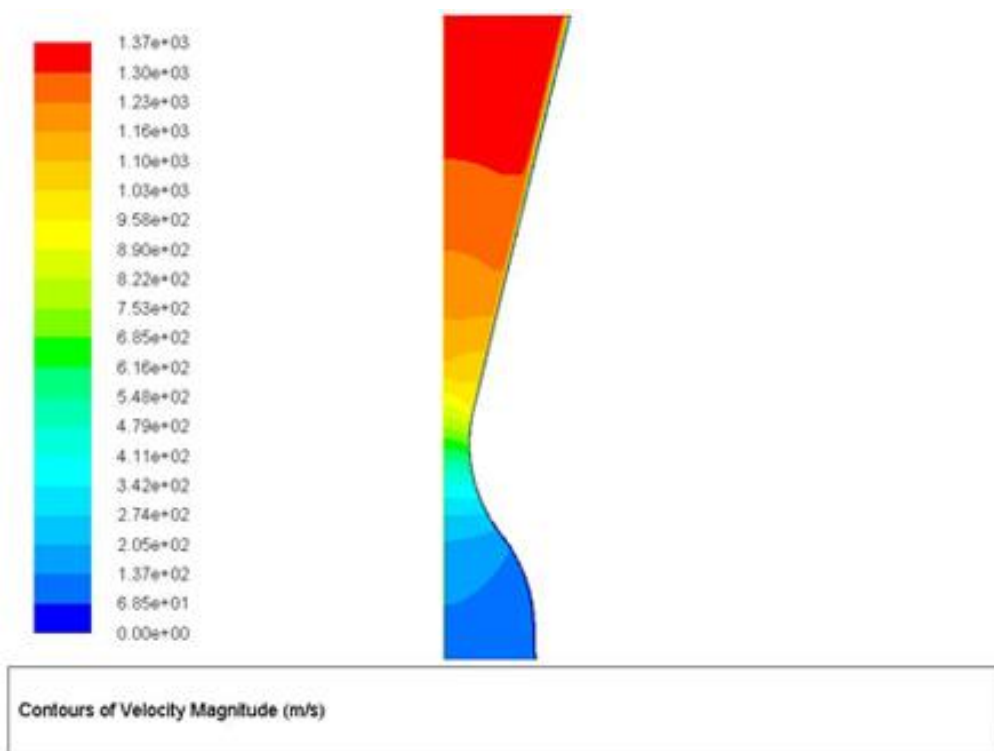


Figura 6.24 – Perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina

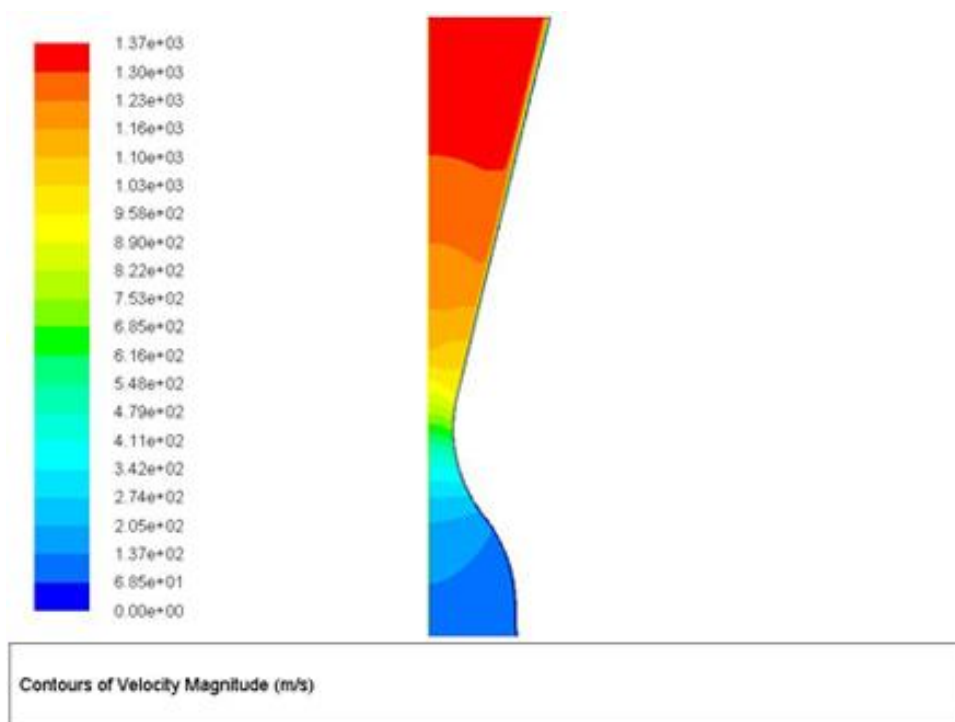


Figura 6.25 – Detalhe do perfil de velocidades para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina

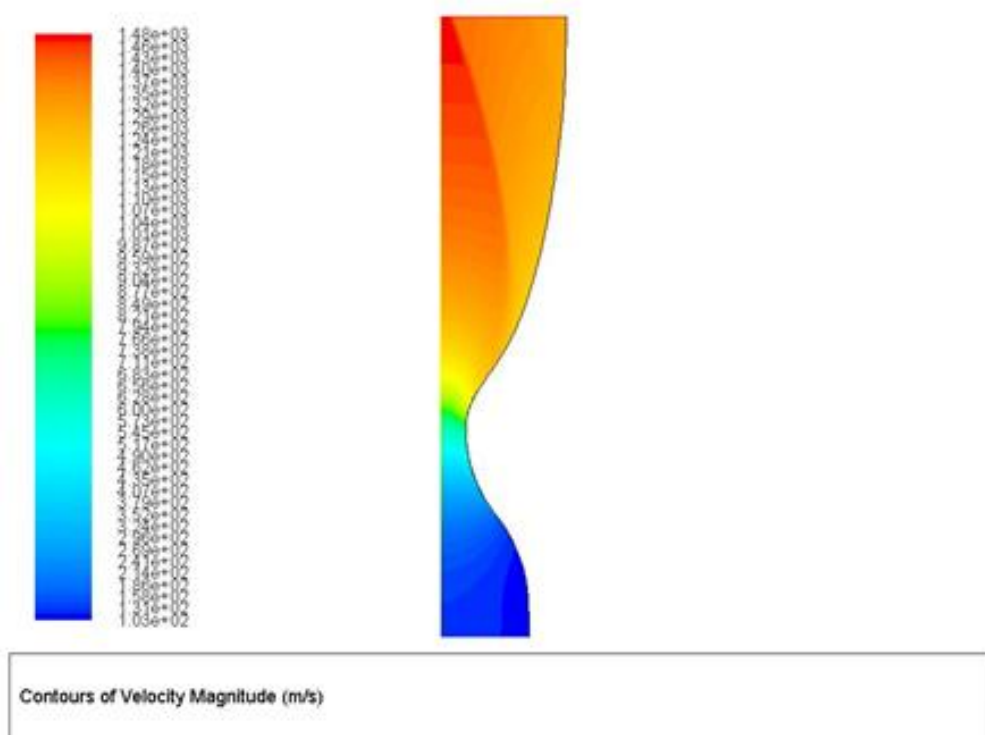


Figura 6.26 – Perfil de velocidades para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina

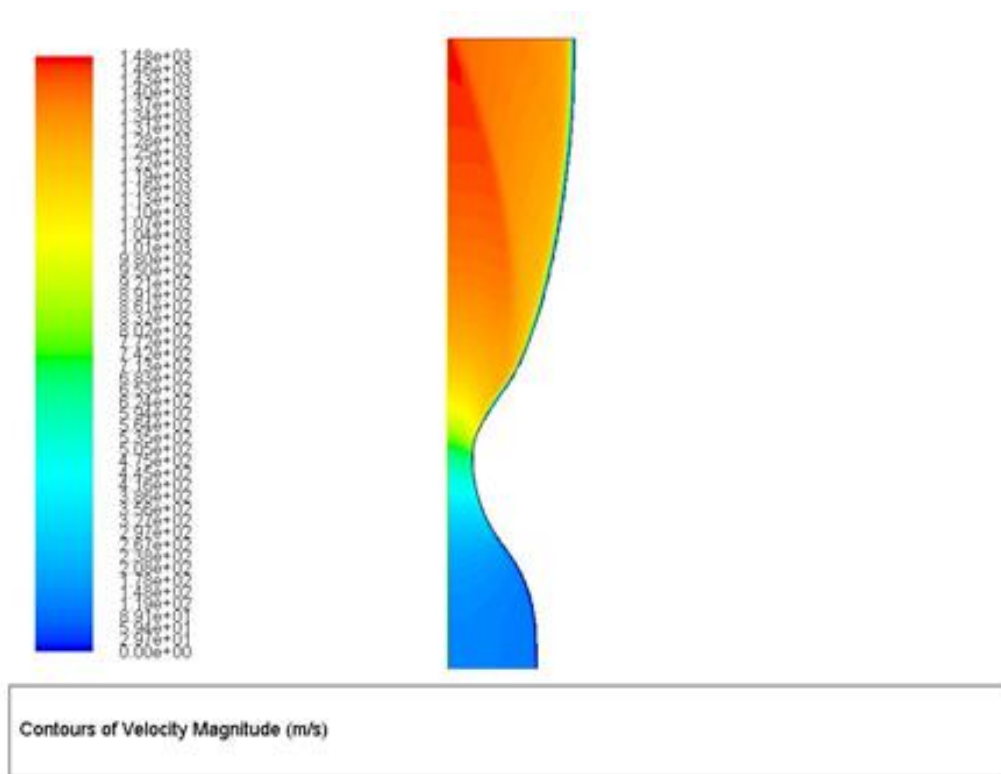


Figura 6.27 – Perfil de velocidades para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina

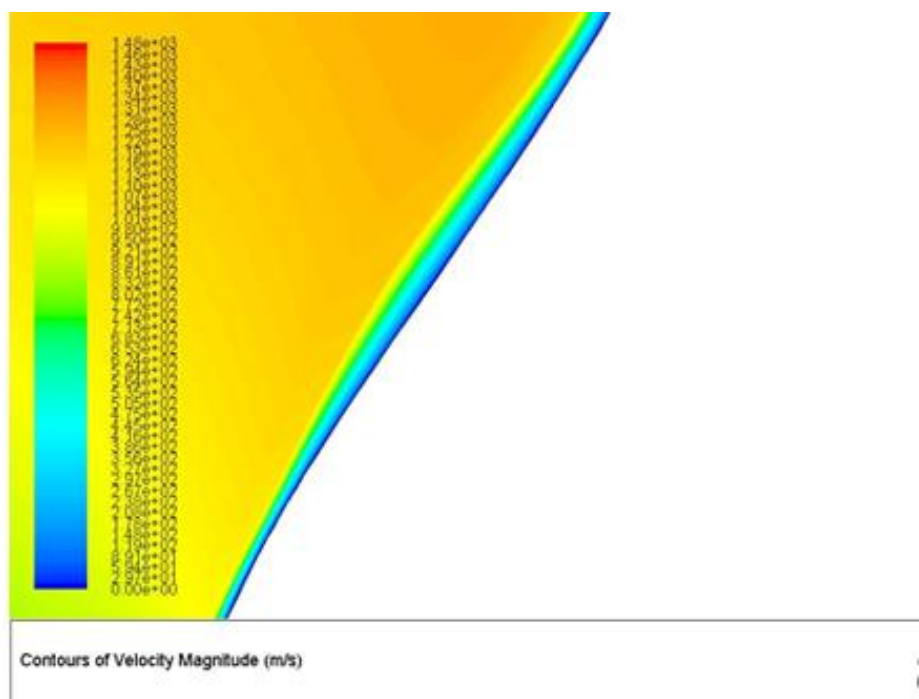


Figura 6.28 – Detalhe do perfil de velocidades para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina

6.5.2. Perfis de número de Mach

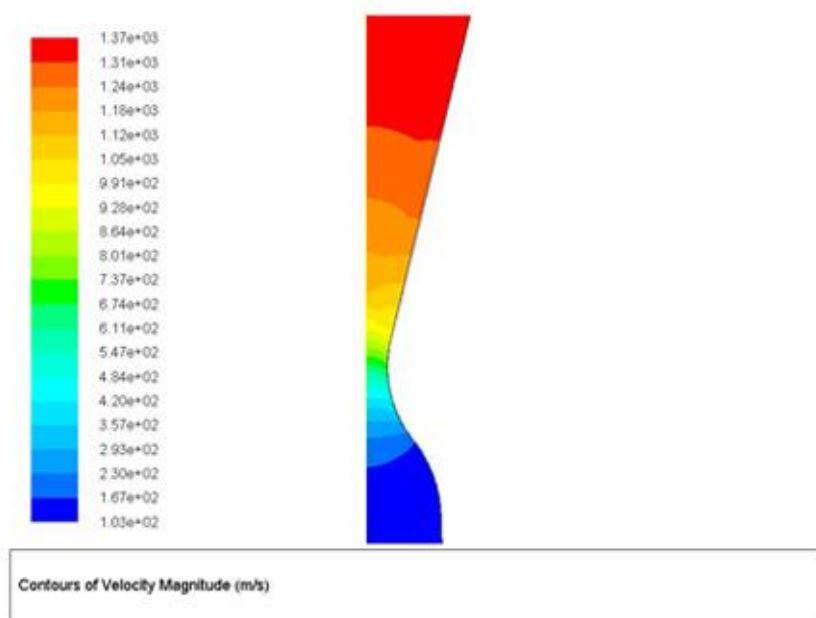


Figura 6.29 – Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa

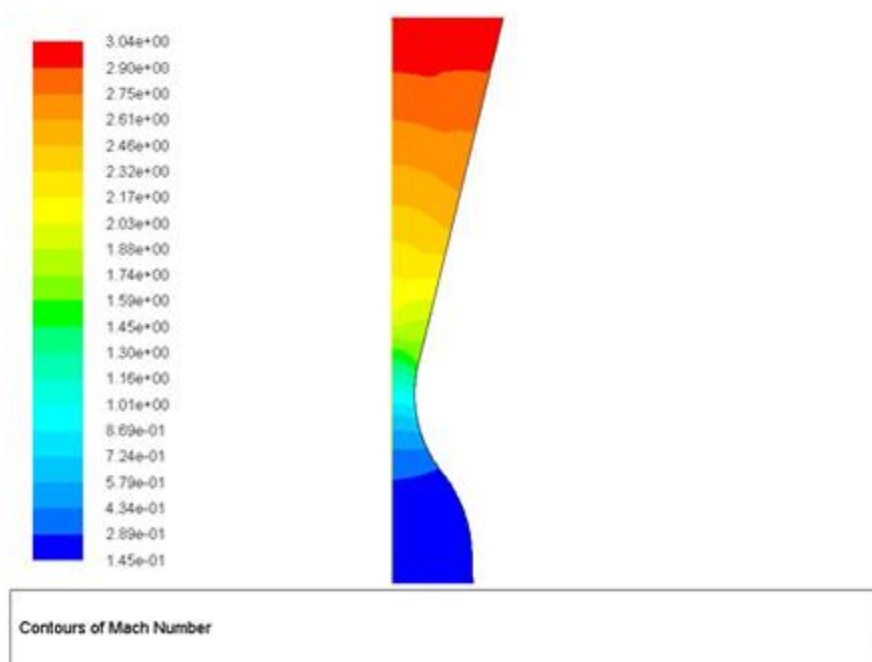


Figura 6.30 – Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina

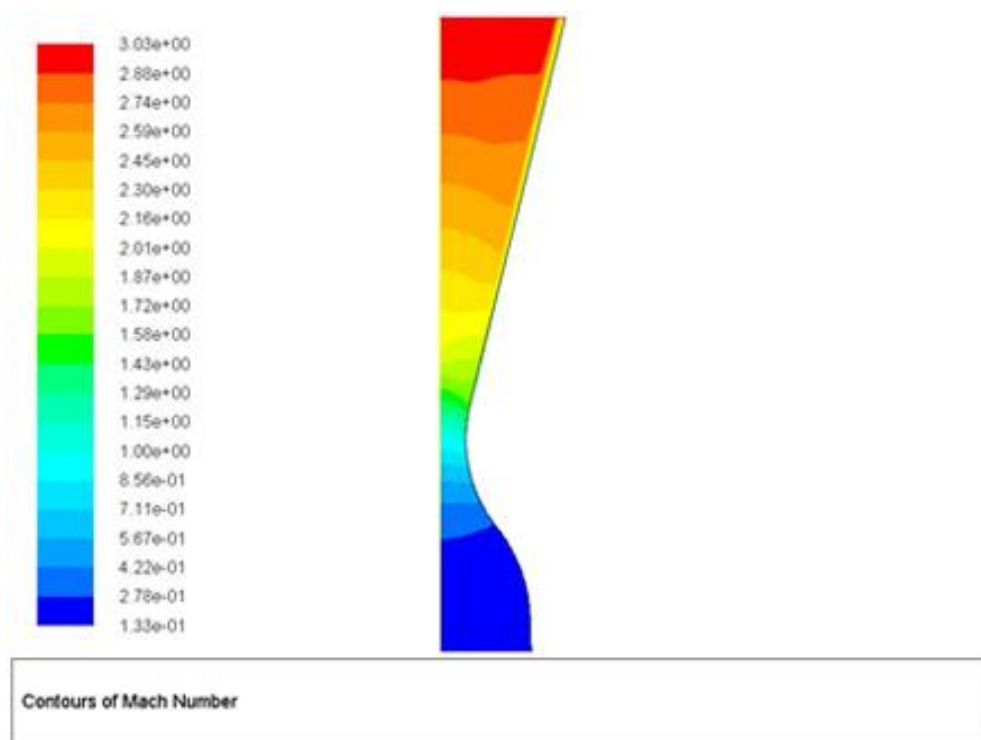


Figura 6.31 – Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa

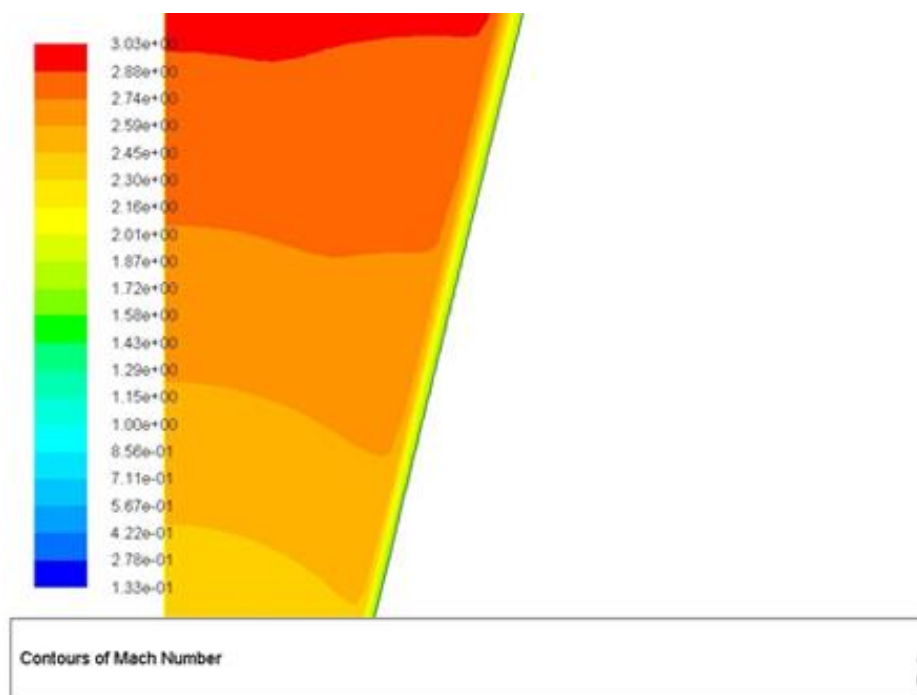


Figura 6.32 – Detalhe do perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa

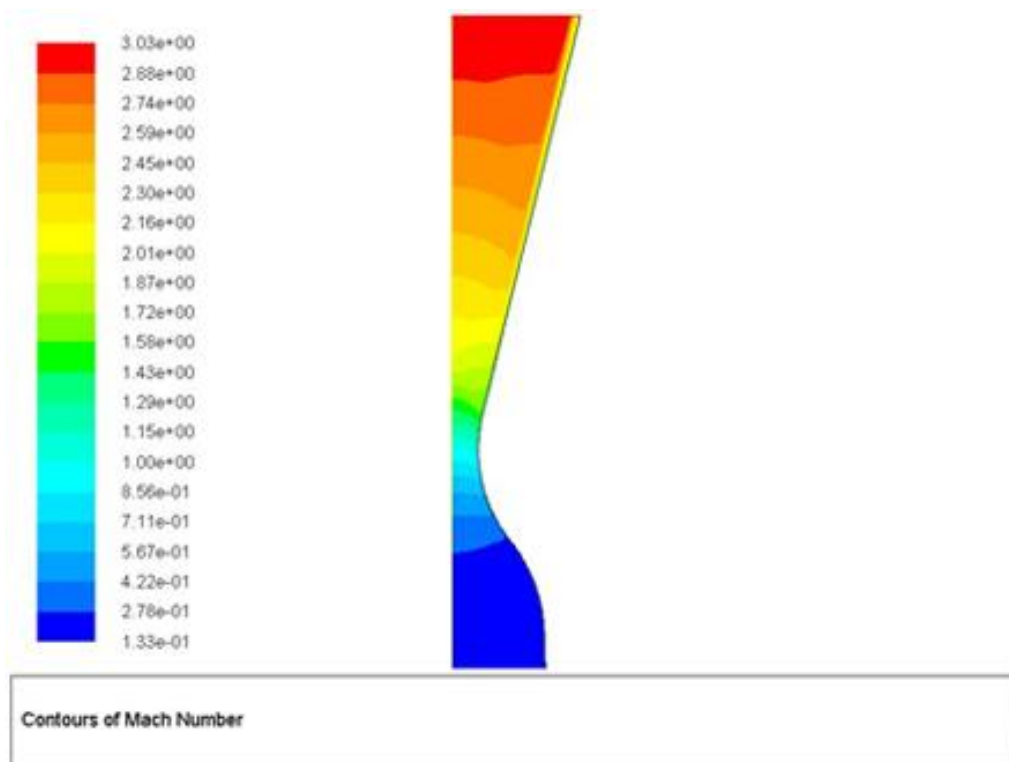


Figura 6.33 – Perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina

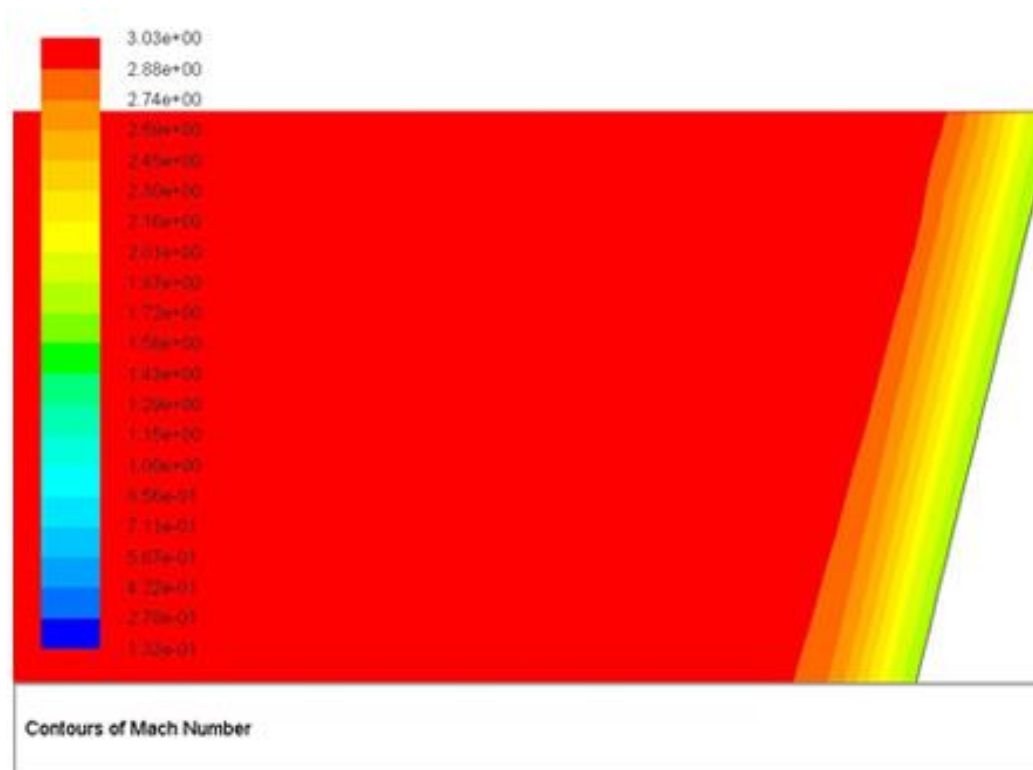


Figura 6.34 – Detalhe do perfil do número de Mach para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina

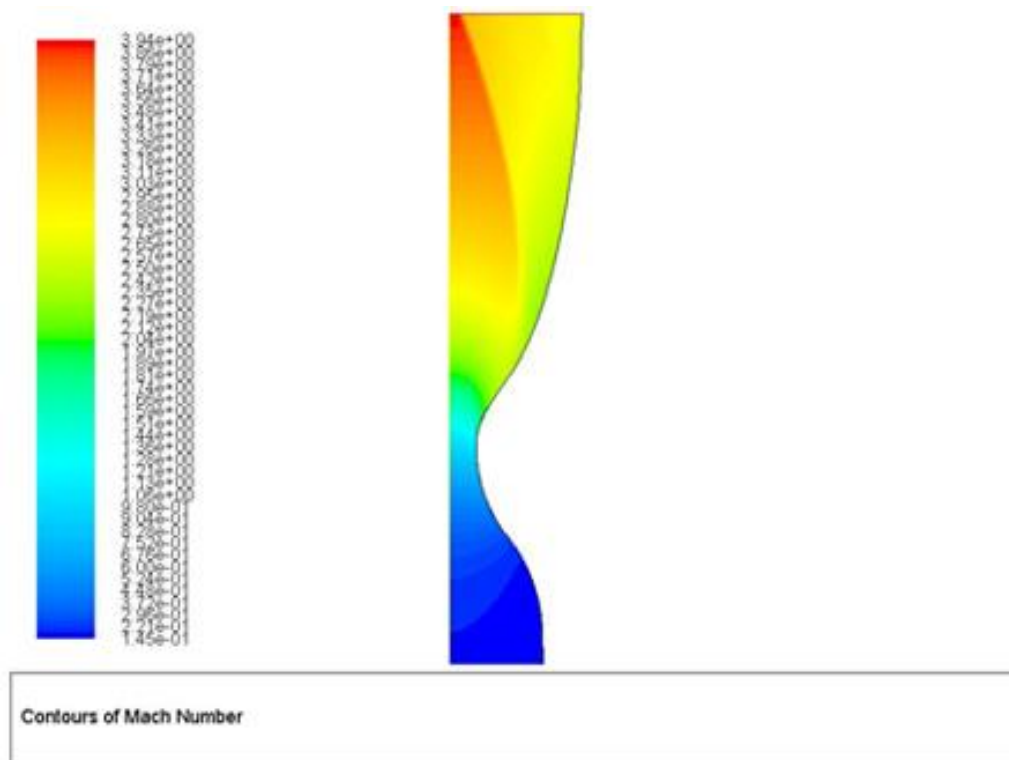


Figura 6.35 – Perfil do número de Mach para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina

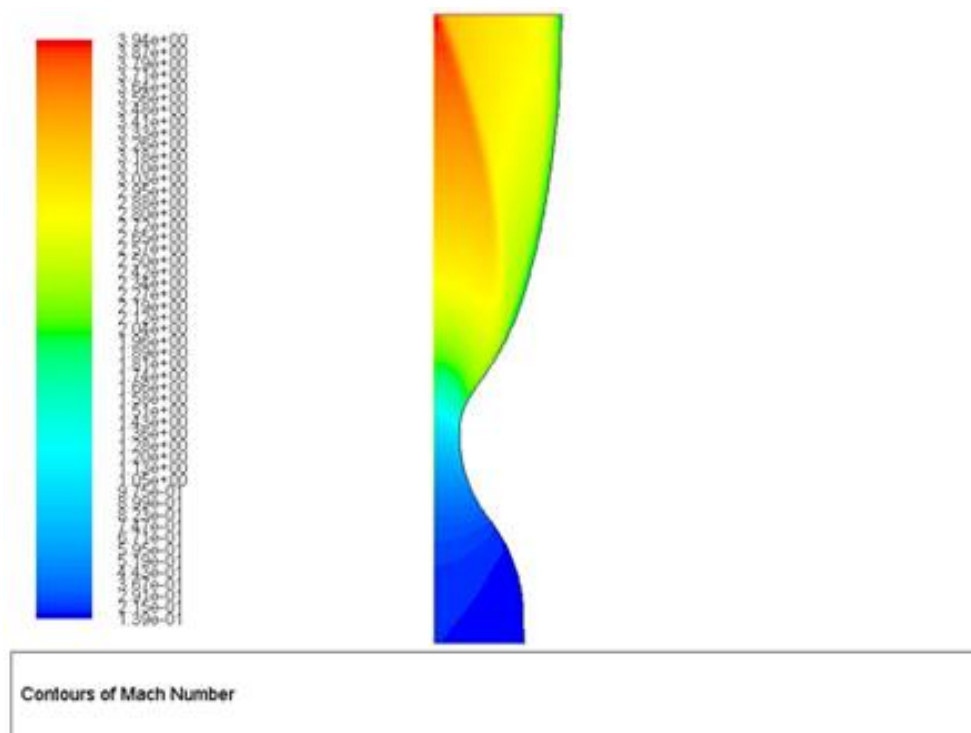


Figura 6.36 – Perfil do número de Mach para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina

6.5.3. Perfis de pressão estática

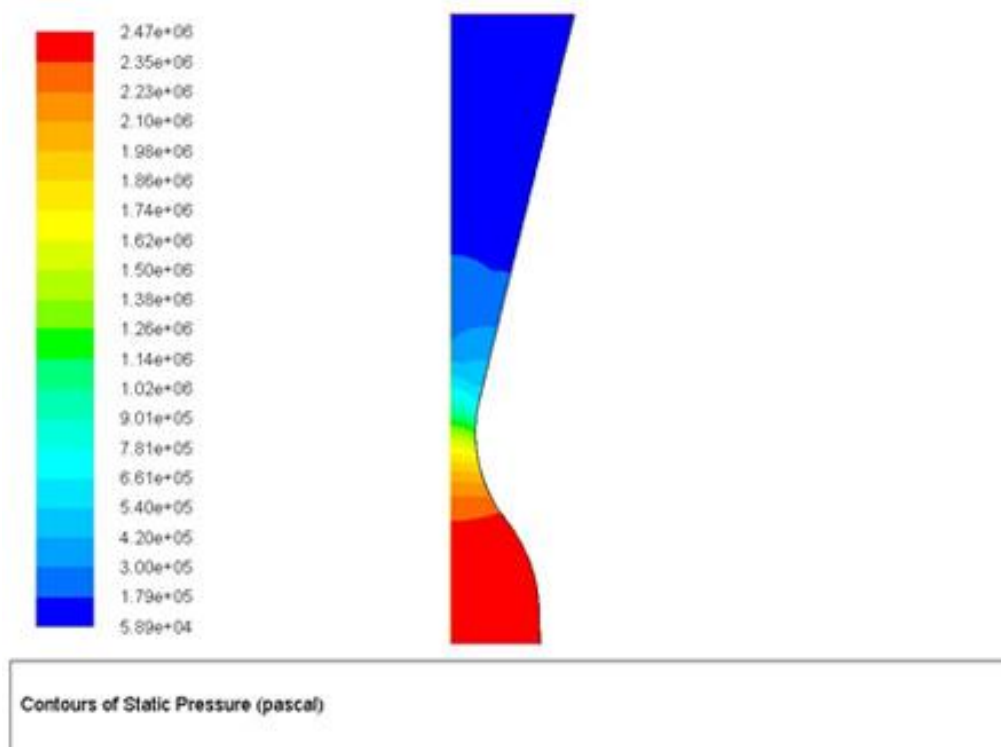


Figura 6.37 – Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa

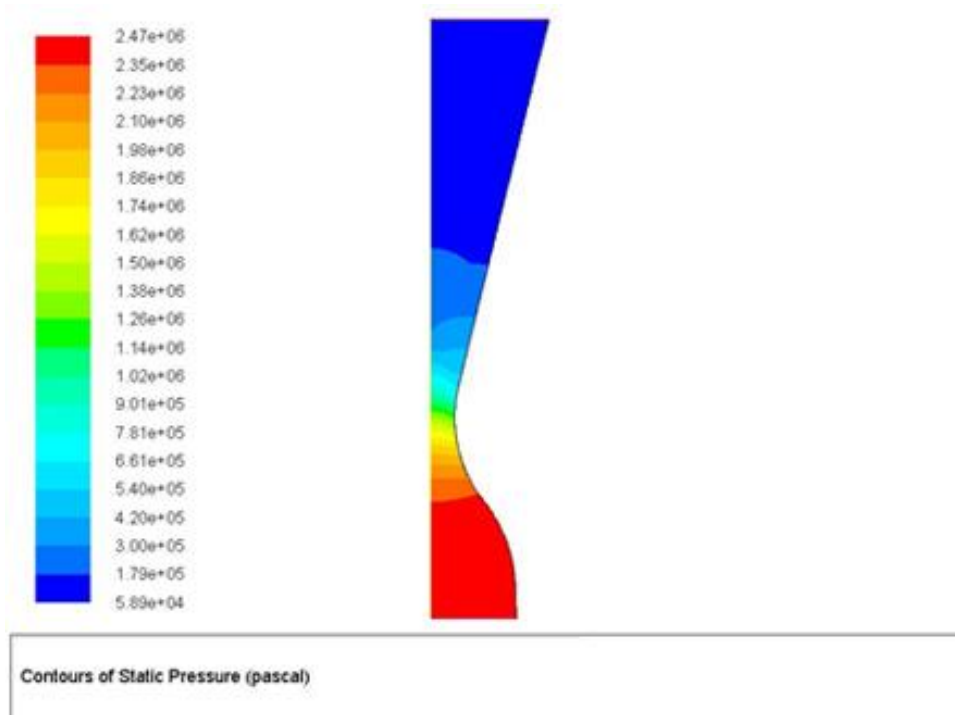


Figura 6.38 – Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina

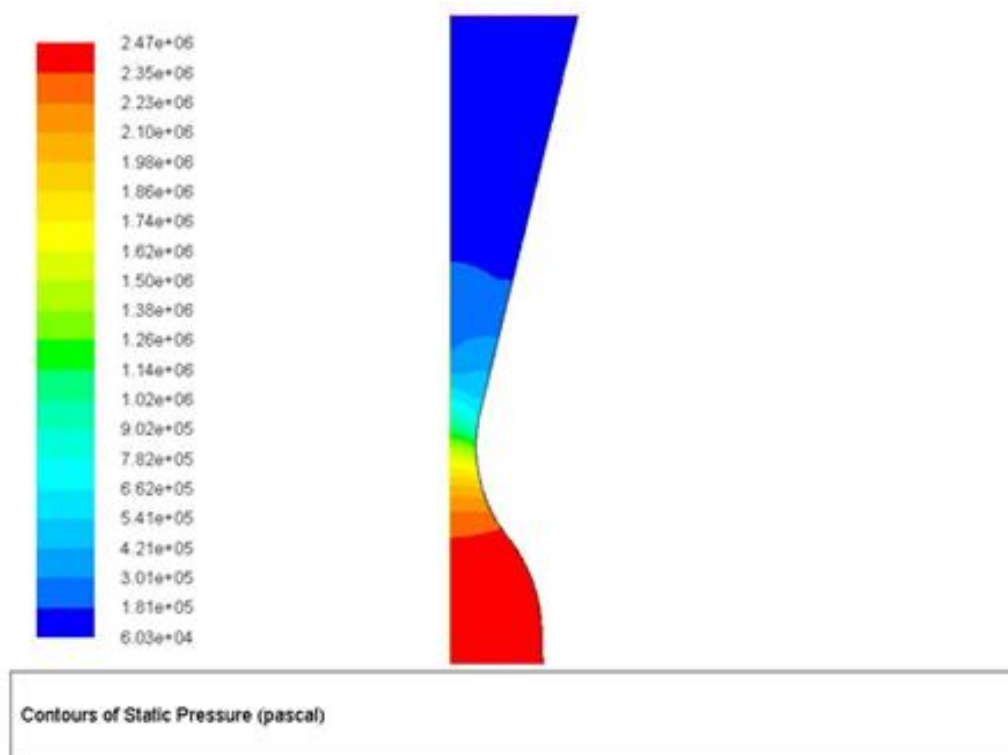


Figura 6.39 – Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa

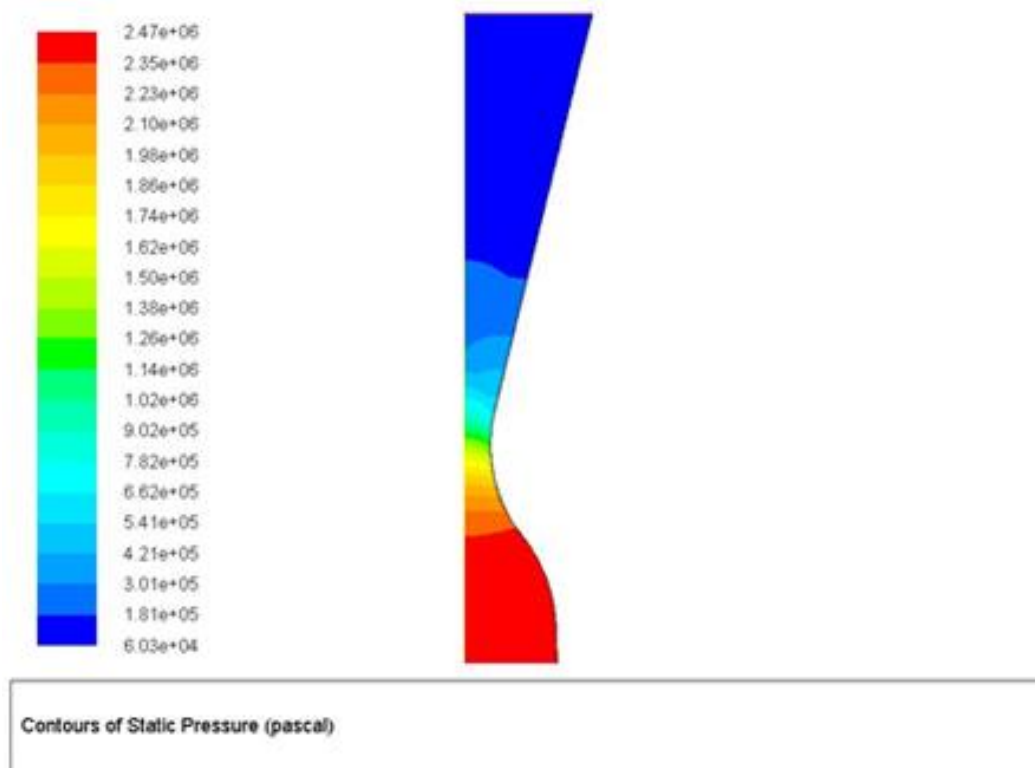


Figura 6.40 – Perfil de pressão para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina

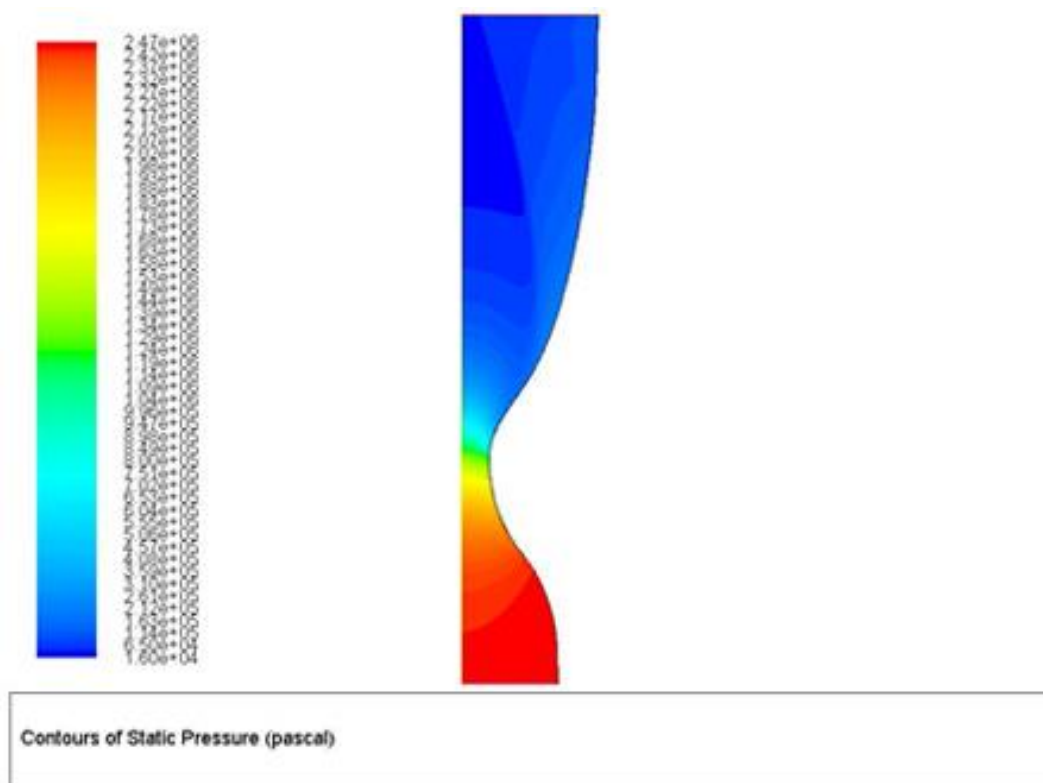


Figura 6.41 – Perfil de pressão para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina

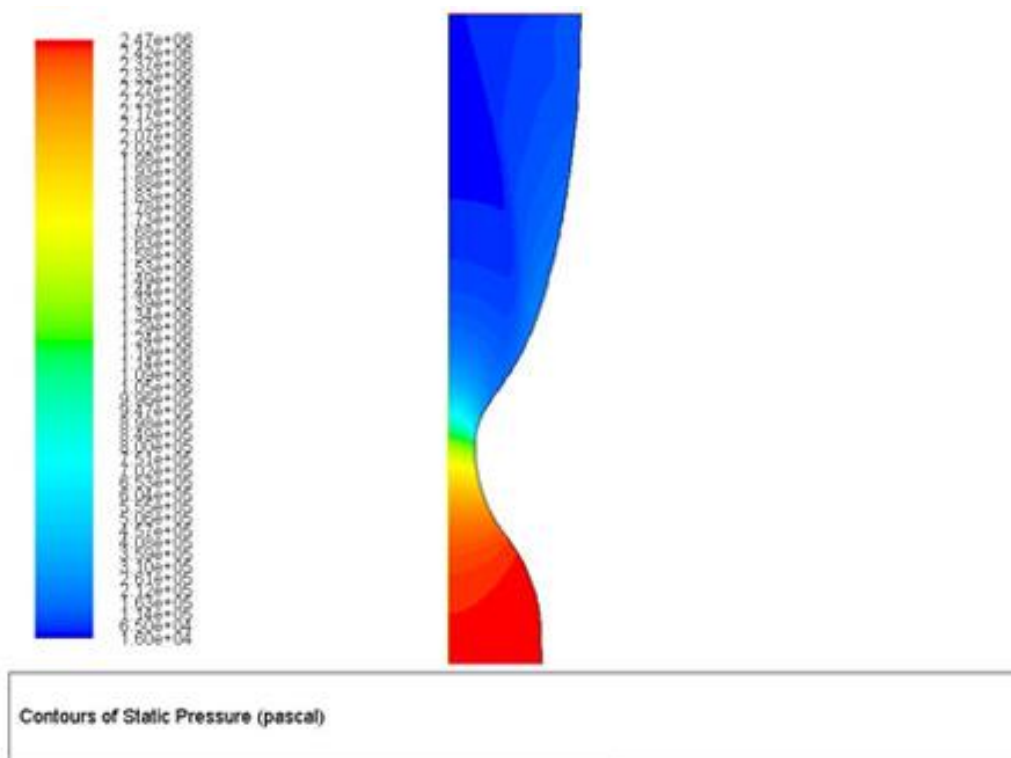


Figura 6.42 – Perfil de pressão para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina

6.5.4. Perfis de temperatura estática

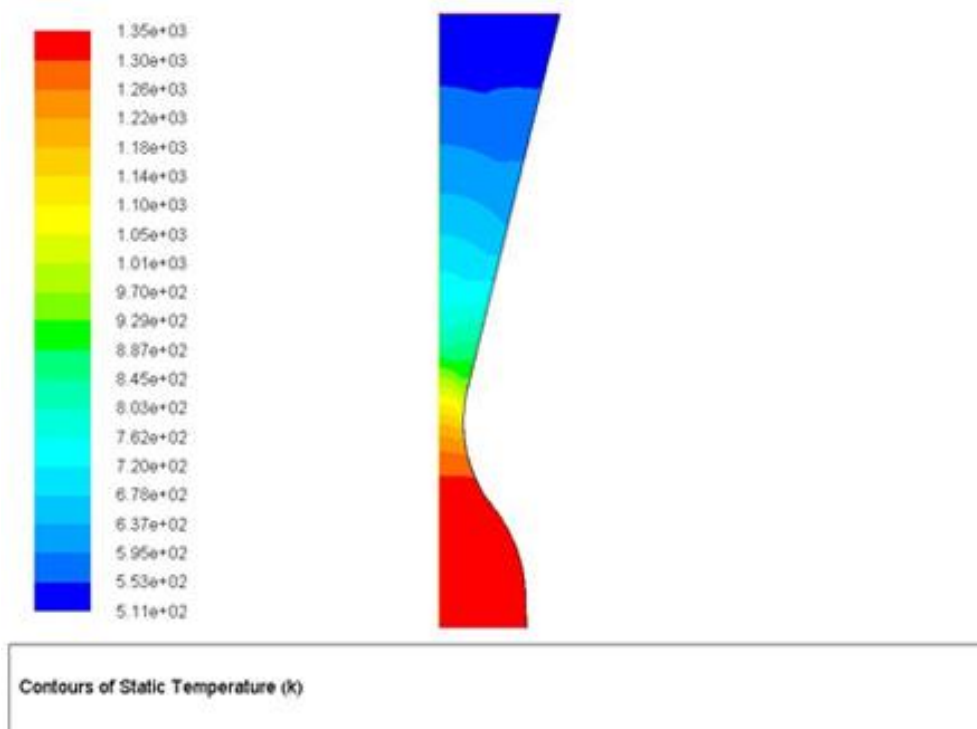


Figura 6.43 – Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha grossa

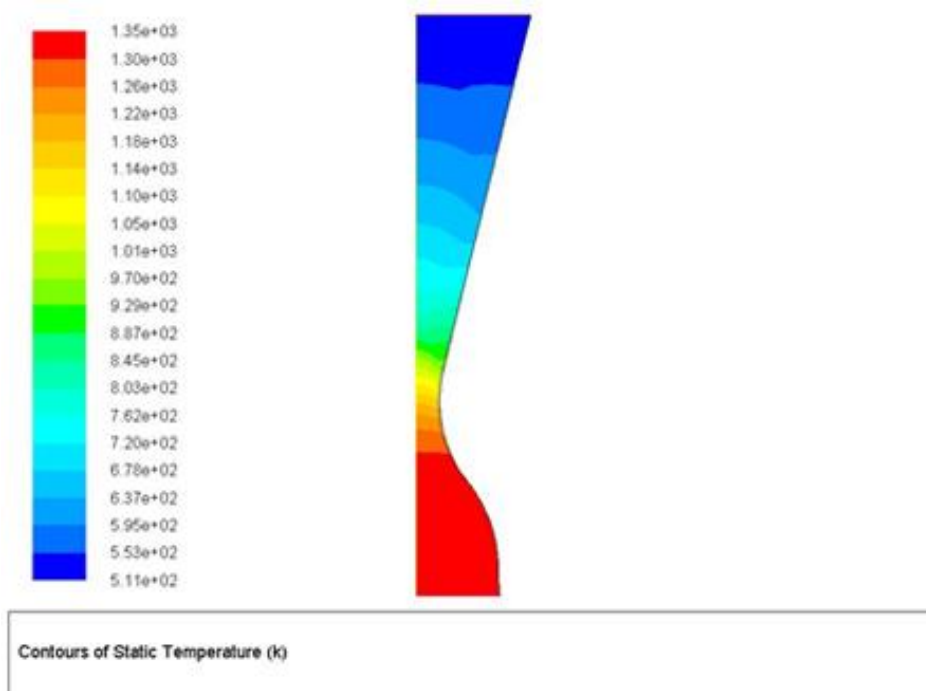


Figura 6.44 – Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido não viscoso e malha fina

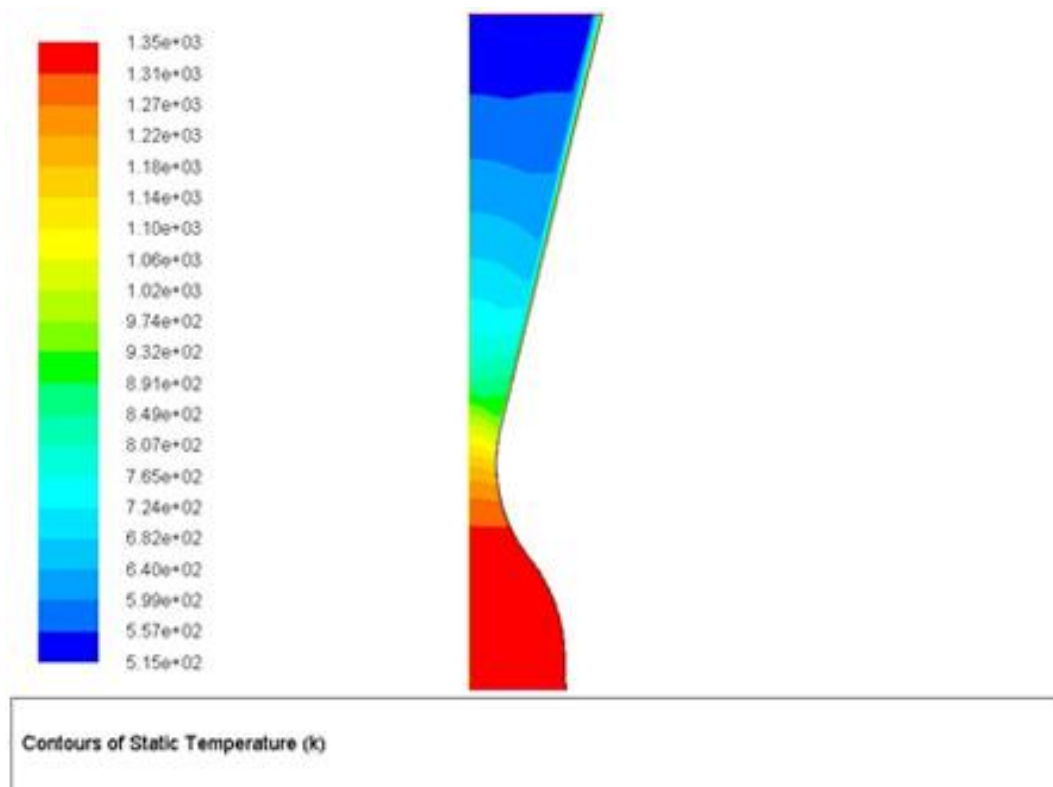


Figura 6.45 – Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha grossa

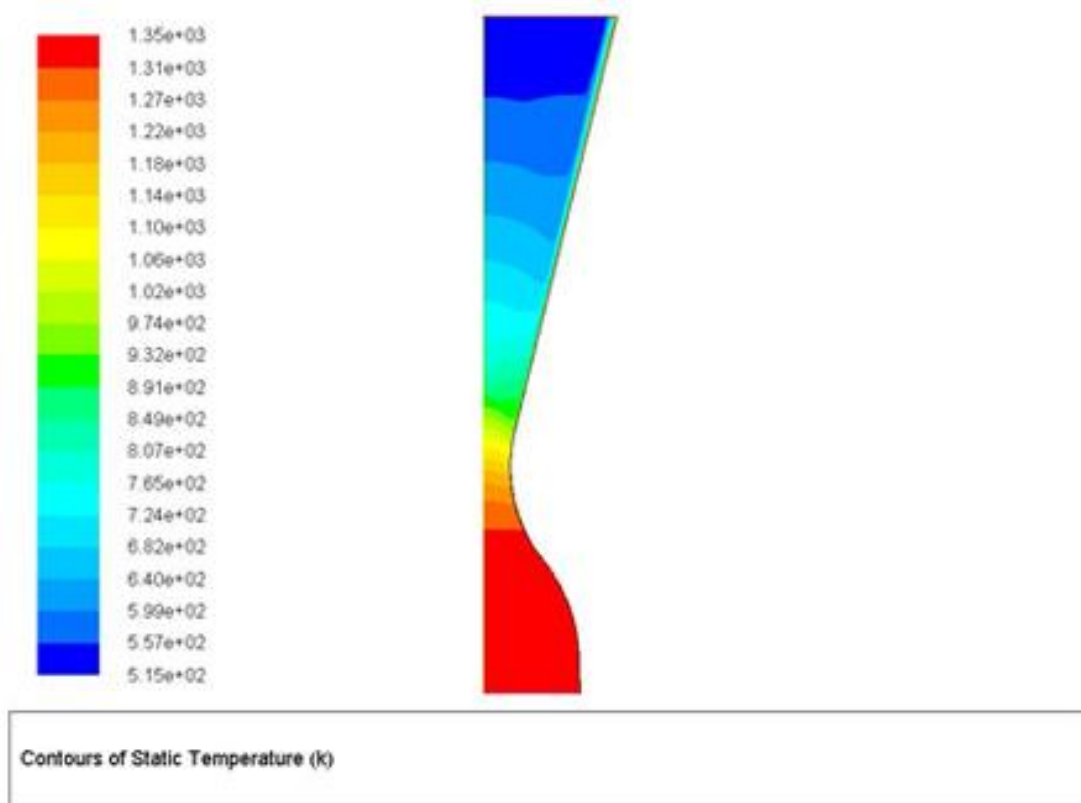


Figura 6.46 – Perfil de temperaturas para o caso do bocal cônico com fluido viscoso e malha fina

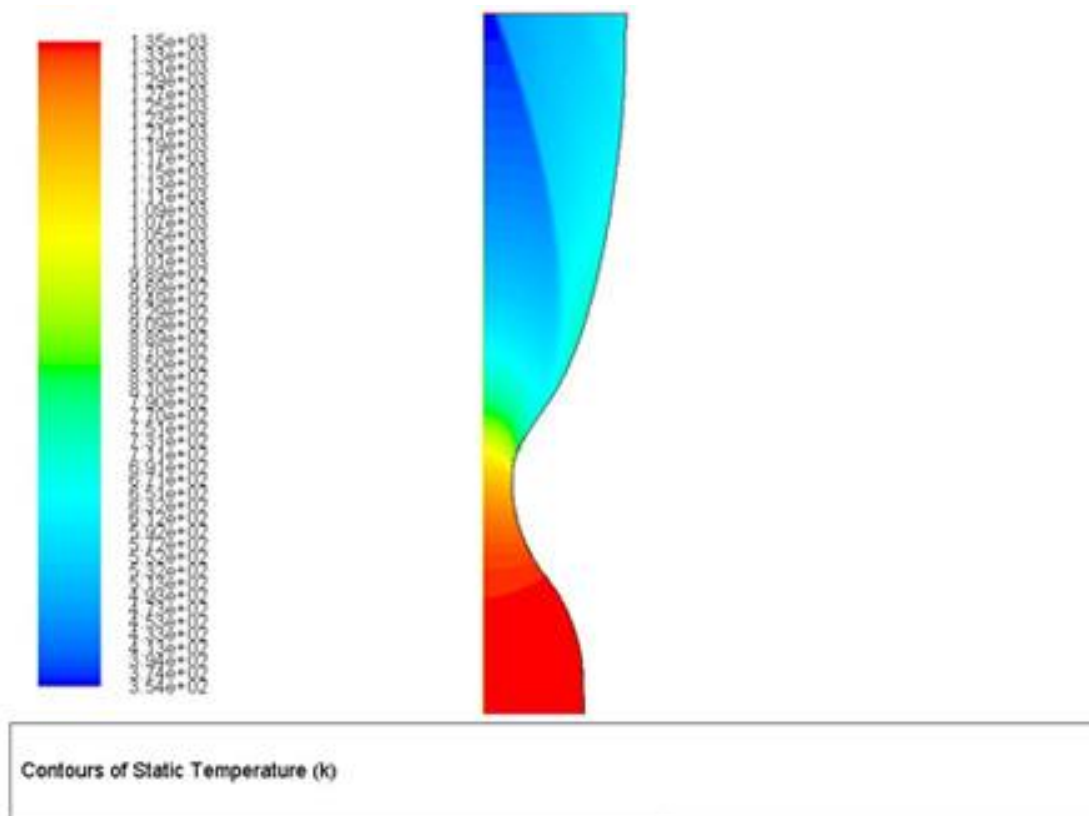


Figura 6.47 – Perfil de temperaturas para o caso do bocal curvo com fluido não viscoso e malha fina

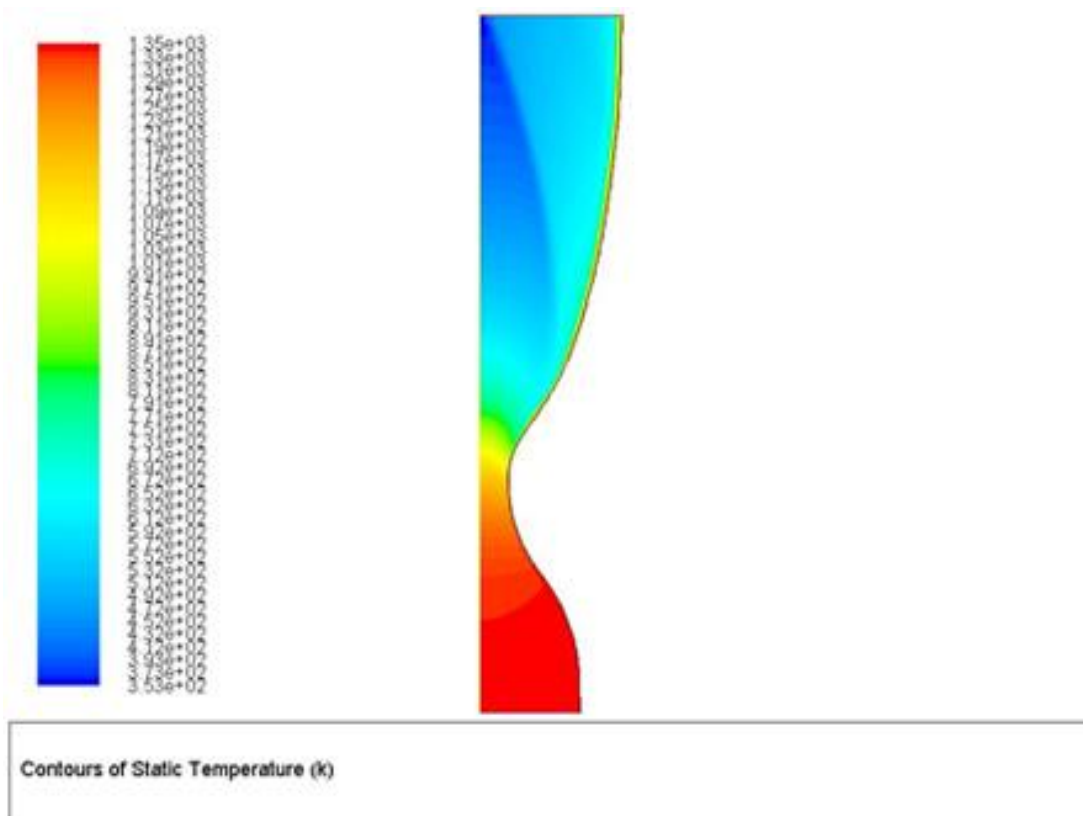


Figura 6.48 – Perfil de temperaturas para o caso do bocal curvo com fluido viscoso e malha fina

6.5.5. Alteração da geometria da garganta

As figura 6.49 apresenta uma simulação para a mesma geometria externa da porção divergente a exceção da porção que une a garganta a esta, agora com raio de curvatura maior. Os parâmetros de simulação continuam sendo os mesmos da tabela 6.21 exceto pela temperatura no interior da câmara de combustão, agora tomada como 1710 K o que implica no valor calculado das propriedades.

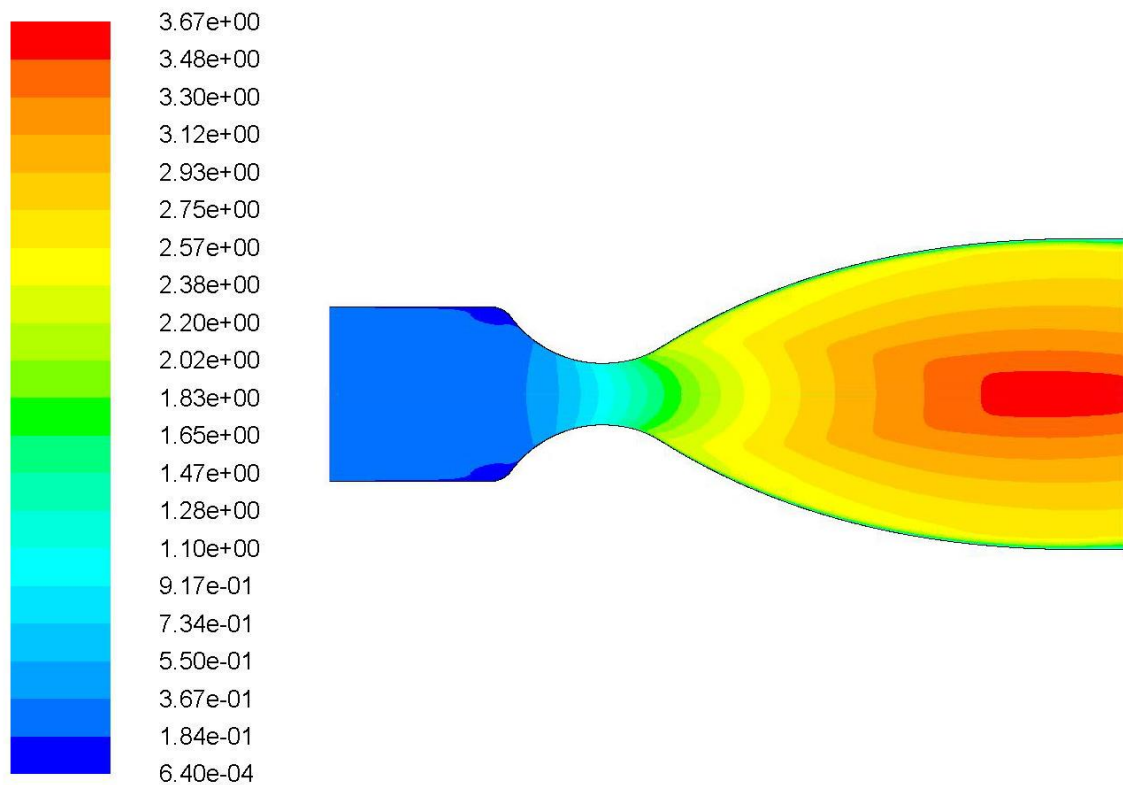


Figura 6.49 – Contornos de número de Mach para a geometria ótima com raio de curvatura entre a garganta e porção divergente maior

6.5.6. Discussões

Antes de discutir os padrões encontrados para o escoamento no interior dos bocais, é necessário validar as soluções obtidas. Para tanto a figura 6.50, extraída de Östlund (2002) será utilizada.

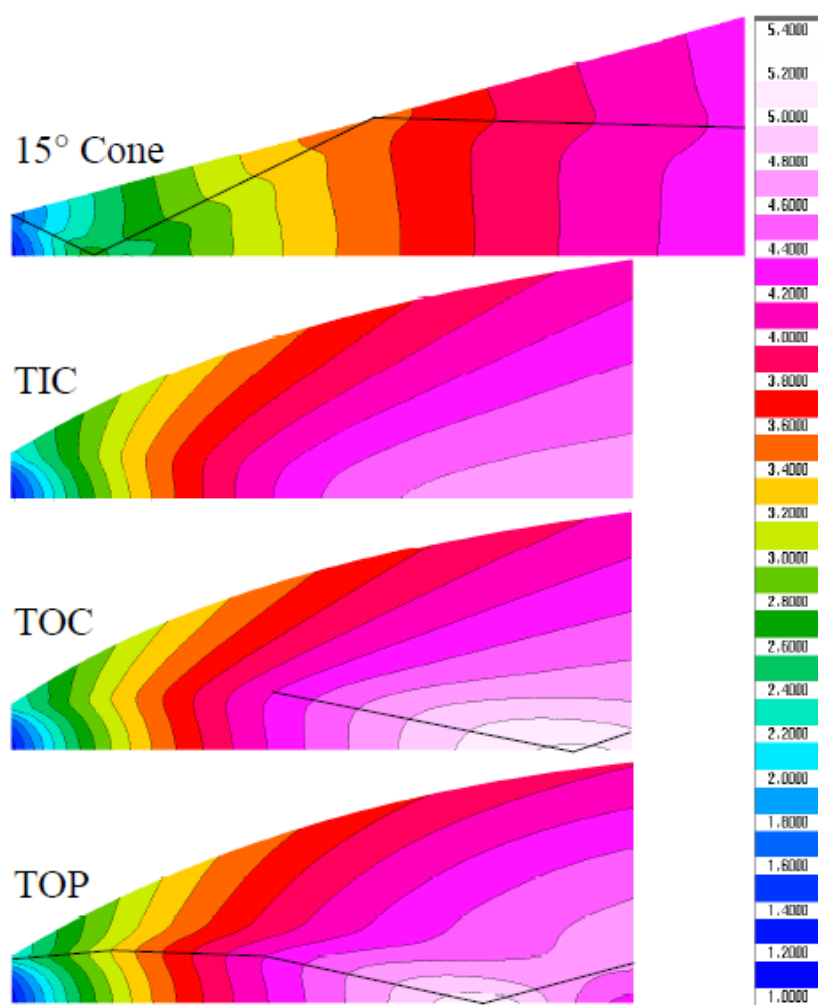


Figura 6.50 – Diferentes contornos de bocal e o escoamento no interior dos mesmos (Östlund, 2002)

Da comparação da figura 6.48 com as demais, nota-se que há concordância completa entre os padrões observados para o escoamento tanto para o bocal curvo quanto para o cônico, bastando observar o comportamento dos perfis do número de Mach apresentados em relação aqueles da figura 6.50.

Havia uma preocupação em relação ao núcleo interno observado nas simulações para o bocal curvo, região esta de maior velocidade em relação a externa. Tal é uma característica também observada segundo o apresentado por Östlund (2002) tanto para o bocal de empuxo otimizado parabólico (TOP) tanto para o bocal com contorno otimizado para o empuxo (TOC). Esta região está de acordo com as previsões do método das características, entretanto ela se mostra mais longa do que aquela teórica. A explicação para tal reside no fato da expansão não estar ocorrendo exatamente na garganta, mas a partir de um ponto já na região da porção supersônica do bocal, efeito este oriundo da mudança de contorno necessária para suavizar a transição entre as regiões convergente e divergente a fim de evitar descolamentos da camada limite. A região externa é de fato aquela relacionada com a uniformização do escoamento a fim de garantir alinhamento do escoamento ao fim do bocal. Outra característica que deve ser levada em conta é o fato de não haver choque no interior do bocal, hipótese esta utilizada para a determinação da porção divergente ótima e verificado nas simulações bidimensionais mesmo no caso viscoso. A figura 6.51 traz uma foto do escoamento de um bocal no qual esta porção de expansão inicial rápida é visualizada com grande clareza.

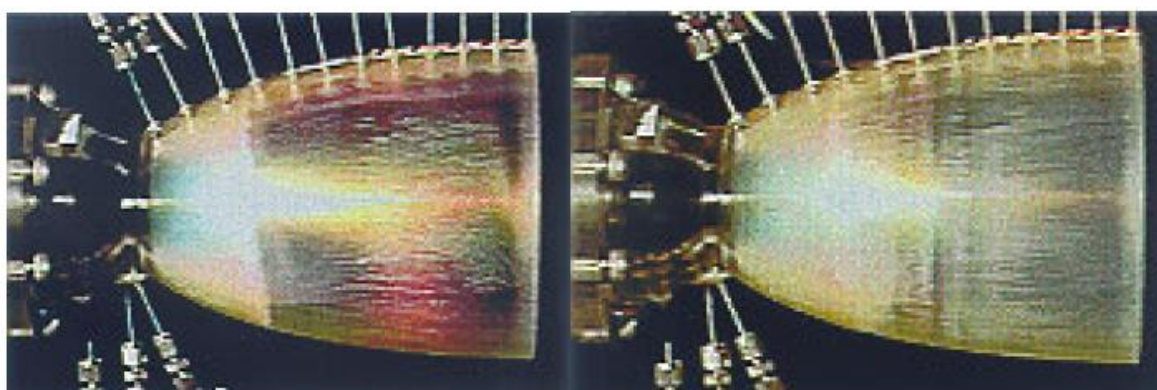


Figura 6.51 – Perfil do escoamento antes e após a separação de choque livre. Nota-se a presença da região central de expansão que permanece presente e de acordo com a verificação em simulações (Östlund, 2002)

Não foi notada qualquer diferença em relação ao padrão de escoamento entre as malhas finas e grosseiras, garantindo que a solução independe da dimensão da

malha desde que a mais grossa já seja suficientemente adequada para capturar os efeitos do escoamento. O mesmo pode-se dizer da comparação entre os casos viscosos e não-viscosos nos quais o padrão global do escoamento entre os casos cônicos e curvos não varia de maneira significativa a não ser por uma fina camada limite que tem velocidade nula na parede e chega rapidamente ao valor da região interna ao bocal, isto dada a grande velocidade dos gases em escoamento na porção interna do bocal que evitam a formação de uma camada limite grossa.

Foi feita uma simulação levando em conta os fenômenos externos e acontecem após a ejeção dos gases do bocal para o caso da geometria cônica e com razão entre a pressão da câmara de combustão e externa igual a 10. O que se nota é a formação de espécies de bolhas que desprendem do escoamento principal do bocal após um choque externo.

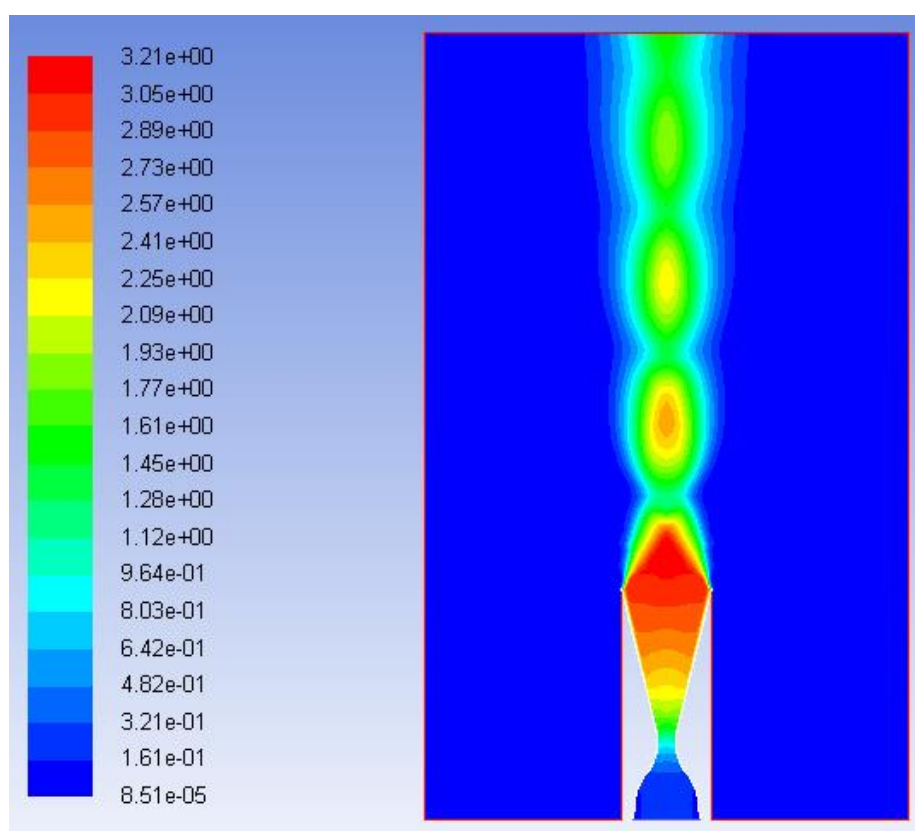


Figura 6.52 – Contornos do número de Mach de um jato deixando o bocal convergente-divergente cônico com razão de pressão 10 entre a entrada e a região ao longe

Desta figura nota-se que, dada a pressão ambiente na região externa somada ao efeito do escoamento lento nas bordas do bocal há um afilamento da região de maior velocidade que tende a ficar tão fina até eventualmente desprender uma “bolha” que fica englobada no jato completo do escoamento. Este efeito, dependendo da razão de pressões tende a formar as formas de diamante observadas na figura 6.53, para o caso de um bocal com expansão fora do bocal, caso este observado em gradientes severos de pressão.

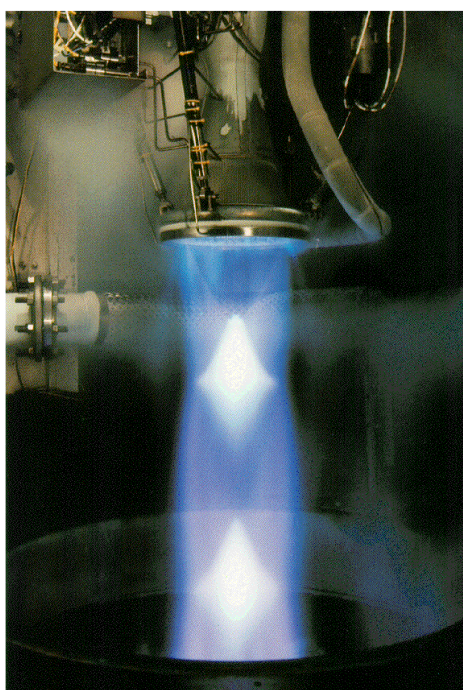


Figura 6.53 – Bocal com expansão externa (Östlund, 2002)

A camada limite de temperatura é de sobremodo importante. Nota-se que há temperaturas elevadas em toda a região da parede, daí a necessidade da seleção adequada de materiais para a confecção do bocal, isto variando desde o necessário para estrutura, isolantes e, eventualmente, uso de fibra de carbono na região da garganta tanto por conta do efeito erosivo quanto pela temperatura do gás a fim de manter tal região íntegra, garantindo eficiência ao bocal.

Por fim, vale verificar que para um bocal cônico a expansão se dá de modo análogo àquele previsto pela teoria unidimensional, com as variações sendo, em

geral graduais e uniformes ao longo de todo bocal, diferentemente do observado para o caso do bocal em forma de sino.

A última conclusão que deve ser assinalada como importante é o efeito do raio de curvatura da seção que conecta a garganta ao bocal. Quanto maior esta, maior a zona de expansão inicial, conseqüentemente maior o ângulo da linha de Mach mais externa, garantindo velocidade maior em determinada região do bocal. Da figura 6.49 nota-se esta clara diferença entre a zona de expansão inicial em relação aos demais bocais sino apresentados. Enquanto nos primeiros a zona de expansão inicial se restringe até o interior do bocal com a linha de Mach final tendo somente sua reflexão para fora do bocal, a geometria apresentada em 6.49 com maior raio de curvatura não tem, sequer, esta zona de expansão inicial completamente no interior do bocal.

7. CONCLUSÃO

Do apresentado, o que se nota é que o propelente sólido é fundamental na determinação do sistema de propulsão, tendo em vista que possibilita a obtenção de um perfil de empuxo adequado para um dado fim. Da observação das características de queima, nota-se que há grandes pressões e temperaturas envolvidas no processo, acarretando na necessidade de estrutura adequada para que tais solicitações mecânicas e térmicas não culminem no colapso do dispositivo.

Do modelo proposto para o cálculo da pressão de combustão no interior da câmara, levando em conta a variação temporal desta conforme há a queima do grão-propelente, obteve-se perfil de curva adequado quando comparado a bibliografia consultada, entretanto os valores numéricos obtidos possuem desvios em relação ao exposto em Nieble (1996). Apurando-se as diferenças, estipula-se que estas são oriundas dos diferentes modelos utilizados, isto é, enquanto Nieble (1996) se vale de um modelo para regime permanente, aqui se optou por resolver numericamente a equação diferencial ordinária que rege a variação da propriedade ao longo do tempo, através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, para o caso análogo ao determinado em Sutton (2001), considerando um bocal com escoamento em regime permanente e isentrópico, hipóteses também utilizadas por Nieble (1996). Após o término da combustão, processou-se o escoamento tal qual um tanque esvaziando, até o ponto em que o interior deste está completamente ocupado por ar atmosférico, no caso, considerando ao nível do mar (~100 kPa).

Uma avaliação do empuxo foi feito para diferentes razões de áreas para o bocal considerado. O que se notou foi concordância com relação a curva de pressão, tendo em vista o caráter diretamente proporcional desta com relação a tal força. Notou-se também um aumento no empuxo acarretado pelo aumento da área de saída do bocal em relação a da garganta, demonstrando o efeito que uma aceleração mais vigorosa dos gases tem, tendo em vista que, da equação da quantidade de movimento, uma maior velocidade de saída destes para uma vazão constante (dada a bloqueio do bocal) acarreta em maior força no volume de

controle considerado, neste caso, dado pelo bocal que o transmite a estrutura do míssil ou foguete.

Para uma garganta de diâmetro 28,7 mm utilizando KNDX e KNSB fino como combustível, nota-se que é possível ter uma pressão interna razoável dentro da câmara de combustão (pico de 2,5 MPa) com velocidade dada por um número de Mach igual a 2,518 na saída, fornecendo pelo método das características um bocal ótimo de comprimento de aproximadamente 230 mm e diâmetro da porção mais externa de 143 mm. Com esta geometria gerou-se malhas para a simulação do escoamento viscoso e comparação com uma geometria cônica da região de descarga do bocal.

Das simulações bidimensionais notou-se que o efeito da viscosidade não é demasiadamente pronunciado no interior do bocal, garantindo que a aproximação invíscida usual é bastante razoável para este caso de altas velocidades de escoamento dado que não há possibilidade de formação de camada limite mais grossa. O bocal curvo também apresentou uma característica interessante no que diz respeito a existência da região de expansão inicial prevista pelo método das características, entretanto mais longa dada a mudança de geometria na região da garganta com escopo de suavizar o contorno. Da comparação destes resultados com aqueles apresentados em Östlund (2002), nota-se boa compatibilidade dos padrões globais do escoamento ainda quando comparado a dados reais. Por fim, vale ressaltar as grandes diferenças entre os padrões de escoamento entre um bocal de geometria ótima com relação aquele de geometria cônica simples (tal como de um V-2), enquanto este último atua de maneira similar as previsões unidimensionais, o primeiro já apresenta padrões de escoamento mais complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aerospace Web. Areospace Website. Disponível em:
<<http://www.aerospaceweb.org/question/propulsion/rocket/solid-rocket2.jpg>>.
Acessado em 03 de out. de 2013.

Anderson, J. D. **Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications**. 1ª Edição. Nova Iorque: McGraw Hill Inc., 1995, 547 p.

Anderson, J. D. **Fundamentals of Aerodynamics**. 1ª Edição. Cingapura: McGraw-Hill International Editions, 1988. 563 p.

Anderson, J. D. **Modern Compressible Flow with Historical Perspective**. 3ª Edição. Nova Iorque: McGraw-Hill, 2003. 760 p.

ANSYS. **ANSYS CFX Reference Guide**. 12ª Edição. Canonsburg: ANSYS Inc., 2009. 324 p.

Biblarz, O; Sutton, G. P. **Rocket Propulsion Elements**. 7ª Edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2001. 765 p.

Cebeci, T. **Turbulence Models and their Applications**. 1ª Edição. Alemanha: Springer, 2004. 118 p.

CFD Online. **Sutherland's Law**. 2013. Disponível em: <http://www.cfd-online.com/Wiki/Sutherland%27s_law>. Acessado em 25/10/2014.

Cook, L. P; et. al. **Sonic and Subsonic Axisymmetric Nozzle Flows**. SIAM Journal on Applied Mathematics, v. 59, n. 5, p. 1812-1824. Agosto de 1999.

Courant, R. Hilbert, D. **Methods of Mathematical Physics, v. 2, Partial Differential Equations**. 1ª Edição. Estados Unidos: John Wiley & Sons, 1962. 830 p.

Etkin, B. **Dynamics of Atmospheric Flight**. 1ª Edição. Estados Unidos: Dover Publications, 1972. 592 p.

Friedland, B. **Control System Design: An Introduction to State-Space Methods**. 1ª Edição. Estados Unidos: Dove Publications, 1986. 513 p.

Hasan, A; et. al. **Numerical Solution for the Design of Minimum Length Supersonic Nozzle**. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, v. 7, n. 5, p. 605-612. Maio de 2012.

Hodge, B. K; Koenig, K. **Compressible Fluid Dynamics with Personal Computer Applications**. Nova Jérsei: Prentice Hall, 1995. 634 p.

Humes, A. F. P. C; et. al. **Noções de Cálculo Numérico**. 1ª Edição. São paulo: McGraw Hill, 1984. 201 p.

Jenkins, P. N. **Missile Dynamics Euqations for Guidance and Control Modeling and Analytics**. Estados Unidos: U.S. Army Missile Command, 1984. 37 p.

Khan, M. A; et. al. **Design of a Supersonic Nozzle using Method of Characteristics**. International Journal of Engineering Research & Technology, v. 2, n. 11, p. 19-24. Novembro de 2013.

Kryeziu, O; Johnson, E. R. **Subsonic to Supersonic Nozzle Flows**. SIAM Journal on Applied Mathematics, v. 73, n. 1, p. 175-194.

Kuo, K. K; Summerfield, M. **Fundamentals of Solid Propellant Combustion**. 1ª edição. Nova Iorque: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1984. 333 p.

Kurov, V.D; Dolzhanskiy, Y. M. **Fundamentals of Design for Solid-Propellant Rocket Missiles**. Arlington: Armed Services Technical Information Agency, 1963. 394 p.

McCabe, A. **Design of a Supersonic Nozzle**. Londres: Her Majesty's Stationery Office, Ministry of aviation, 1967, p. 38

Maccio, F. **Numerical Modeling of Composite Propellant Combustion**. Twenty-Seventh Symposium (International) on Combustion/ the Combustion Institute. 1998, p. 2387-2395.

Malalasekera, W; Versteeg, H. K. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 1ª Edição. Glasgow: Pearson Education, 1995. 517 p.

Maliska, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2013. 453 p.

Munson, B. R; Young, D. F; Okiishi, T. H. **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. Tradução da 4ª Edição americana. Traduzido por Zerbini, E. J. São Paulo: Blucher, 2004. 572 p.

Nakka Rocketry. **Richard Nakka's Experimental Rocketry Website**. Disponível em: <http://www.nakka-rocketry.net/th_pix/grains1.gif>. Acessado em 01 de out. De 2013.

Nieble, M. D; Maximiano, U. **Motor-Foguete (Parte 1): Estudo da Queima do Propelente**. 1996. 34 p. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.

Olsen, B. J. **Large-Eddy Simulation of Multi-Material mixing and Over-Expanded Nozzle Flow**. 2012. 252 p. Tese (Pós-Doutorado) – Stanford University.

Östlund, J. **Flow Processes in Rocket Engine Nozzles with focus on Flow Separation and Side-Loads**. 2002. 182 p. Tese (Doutorado) – Kungl Tekniska Högskolan (KTH). Estocolmo.

Özkan, B. **Dynamic Modeling, Guidance and Control of Homing Missiles**. 2005. 274 p. Tese (Doutorado) – The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University.

Ordnance Corps. **Ordnance Engineering Design Handbook Ballistic Missile Series: Propulsion and Propellants**. Washington D.C.: Ordnance Corps, 1960. 107 p.

Saltara, F. **Notas de Aula da Disciplina PME2556 – Dinâmica dos Flúidos Computacional**. Escola Politécnica da USP: 2014.

Shapiro, A. H. **The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow – Volume 1**. 1ª Edição. Nova Iorque: The Ronald Press Company, 1953. 647 p.

Siouris, G. M. **Missile Guidance and Control Systems**. 1ª Edição. Nova Iorque: Springer, 2004. 681 p.

Spalding, D. B; Ng, K. H. **Turbulence Model for Boundary Layer near Walls**. The Physics of Fluids, v. 15, n. 1, p. 20-30. 1970.

Spalding, D. B; Launder, B. E. **The Numerical Computation of Turbulent Flows**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 3, p. 269-289. 1973.

Spalding, D. B; et. al. **A solution method for three-dimensional turbulent boundary layers on bodies of arbitrary shapes**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 15, p. 161-174. 1977.

Spalding, D. B; Singhal, A. K. **Predictions of two-dimensional boundary layers with the aid of the k- ϵ model of turbulence**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 25, p. 365-383. 1980.

Taylor. T. S. **Introduction to Rocket Science and Engineering**. 1ª Edição. Boca Raton: CRC Press, 2009. 310 p.

TU Delft. **Solid Rocket Propellants and their Properties**. Disponível em: <<http://www.lr.tudelft.nl/en/organisation/departments/space-engineering/space-systems-engineering/expertise-areas/space-propulsion/design-of-elements/rocket-propellants/solids/>> Acesso em: 27 de abril de 2014.

UC Davis. **ANSYS Help.** Disponível em: <
<http://aerojet.engr.ucdavis.edu/fluenthelpp/html/ug/node1513.htm>>.

U.S. Army. **Ordnance Engineering Design Handbook Ballistic Missile Series: Trajectories (U).** Washington D.C.: Ordnance Corps, 1960. 116 p.

Vuran, A. Ö. **Fuzzy Logic Guidance System Design for Guided Missiles.** 2003. Dissertação de Mestrado – Middle East Technical University. Turquia.

Zebbiche, T; Youbi, Z. **Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature.** Emirates Journal for Engineering Research, v. 11, n. 1, p. 91-102. 2006

Zucker, R. D. **Fundamentals of Gas Dynamics.** 1ª Edição. Chesterland: Matrix Publishers, 1978. 443 p.

Zucrow, M. J. **Principles of Jet Propulsion and Gas Turbines.** 1ª Edição. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1948. 563 p.

APÊNDICE A – PROJETO DO CONTROLADOR

A.1. OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

A.1.1.. Análise de controlabilidade

Para que os métodos de controle sejam aplicáveis, é necessário que o sistema seja controlável, isto é, dado um estado inicial, existe uma lei de controle u tal que ela leve o sistema do estado inicial até qualquer estado final num intervalo finito de tempo, logo, é necessário que todos os estados sejam atingíveis. Para um sistema linear invariante no tempo ($\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$), é possível verificar sua controlabilidade se, e somente se, a matriz de controlabilidade $Q = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ tenha posto (número de linhas linearmente independentes) igual à dimensão do sistema.

No presente caso, a matriz de controlabilidade foi construída numericamente a partir do comando *ctrb* do Matlab. Posteriormente, comparou-se a dimensão do sistema com o posto de Q computando o valor de $\text{length}(A) - \text{rank}(Q)$. Com os valores adotados o sistema é controlável, necessidade para aplicação dos métodos de controle.

A.1.2. Análise de observabilidade

Uma vez que não é possível medir fisicamente todas as variáveis de estado em todos os instantes de tempo, deve-se utilizar um algoritmo de observador linear para se estimar o vetor de estados em todo instante de tempo. Para que esta implementação seja válida, é necessário garantir que o sistema seja observável. Para

tanto, é necessário que, dado o vetor de observações y e o vetor de entradas u , seja possível obter o vetor de estados x , em cada instante de tempo. Como se trata de um sistema linear invariante no tempo, prova-se a observabilidade se, e somente se, o posto a matriz $N = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$ for igual à ordem do sistema, ou, equivalentemente, se o número de linhas linearmente independentes for igual à ordem do sistema.

Novamente, a matriz de observabilidade foi computada numericamente através do comando *obsv* do Matlab. A partir desta, por meio da comparação de seu posto com a dimensão do sistema (ordem) a partir da diferença $length(A) - rank(N)$. Para os dados utilizados o sistema não é observável, requerendo a utilização de um observador de Lyapunov para aplicação do controle.

A.2. SÍNTESE DO REGULADOR

A.2.1. Alocação de polos

O escopo deste método de síntese é, a partir dos polos desejados para a dinâmica do sistema, sejam eles para torna-lo estável ou, também, garantir determinada resposta desejada, determinar uma matriz de ganhos $[K]$ tal que, segundo uma lei de controle do tipo:

$$u = -Kx$$

Determinar uma nova matriz dinâmica com os novos polos adequados a resposta que se espera do sistema.

$$\dot{x} = \underbrace{(A - BK)}_{A_{controle}} x$$

Não se acertou todos os parâmetros do sistema dinâmico para uma correta síntese do controlador, entretanto, utilizando alguns dados fornecidos por Özkan (2005) e assumindo todos os coeficientes aerodinâmicos como unitários, é possível

simular o sistema dinâmico linearizado, no caso em questão instável, conforme avaliado pelos polos com parte real positiva. Desta forma, a partir da imposição de polos de malha fechada negativos é possível, notar que o código utilizado para a simulação é funcional, requerendo somente a obtenção de parâmetros precisos para o modelo em estudo a fim de sintetizar adequadamente o controlador.

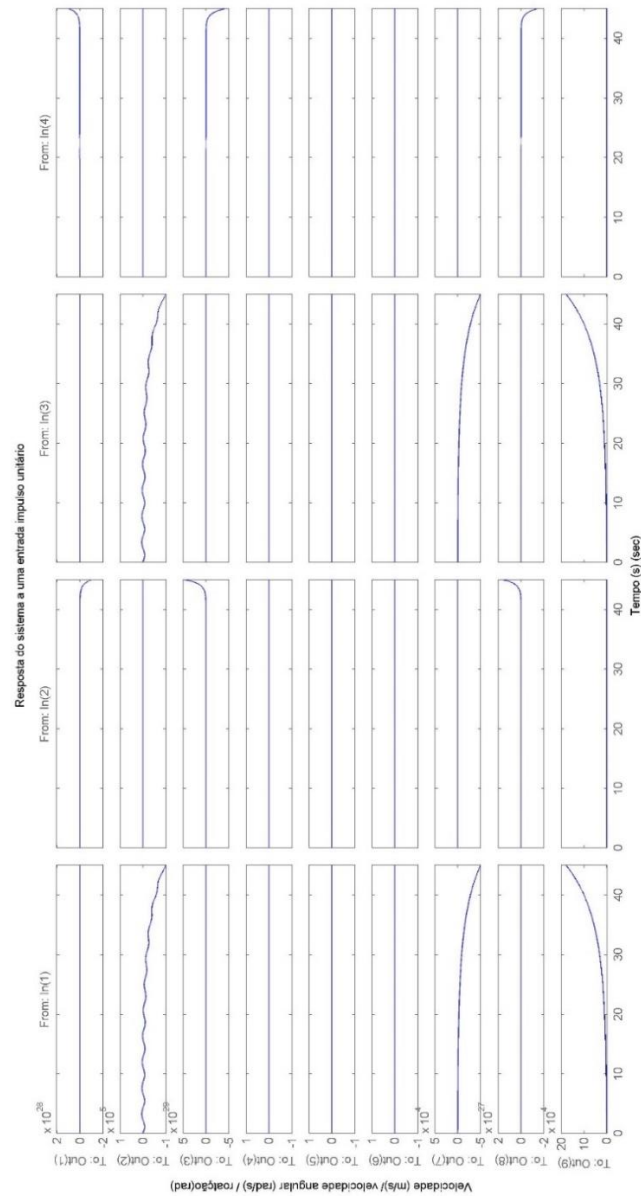


Figura A.1 – Simulação em malha aberta para uma entrada tipo impulso unitário em cada uma das entradas

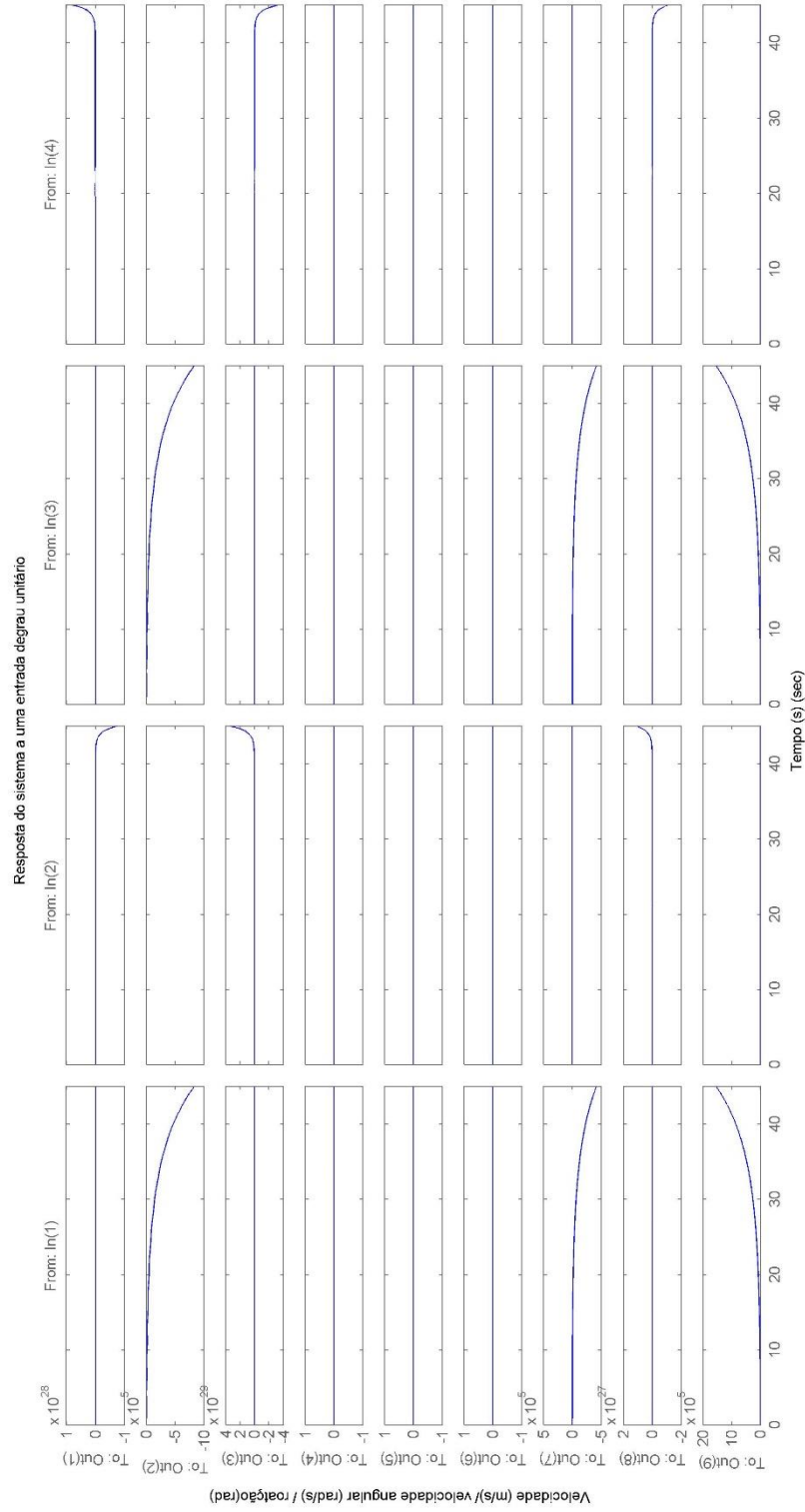


Figura A.2 – Simulação em malha aberta para uma entrada tipo degrau unitário em cada uma das entradas

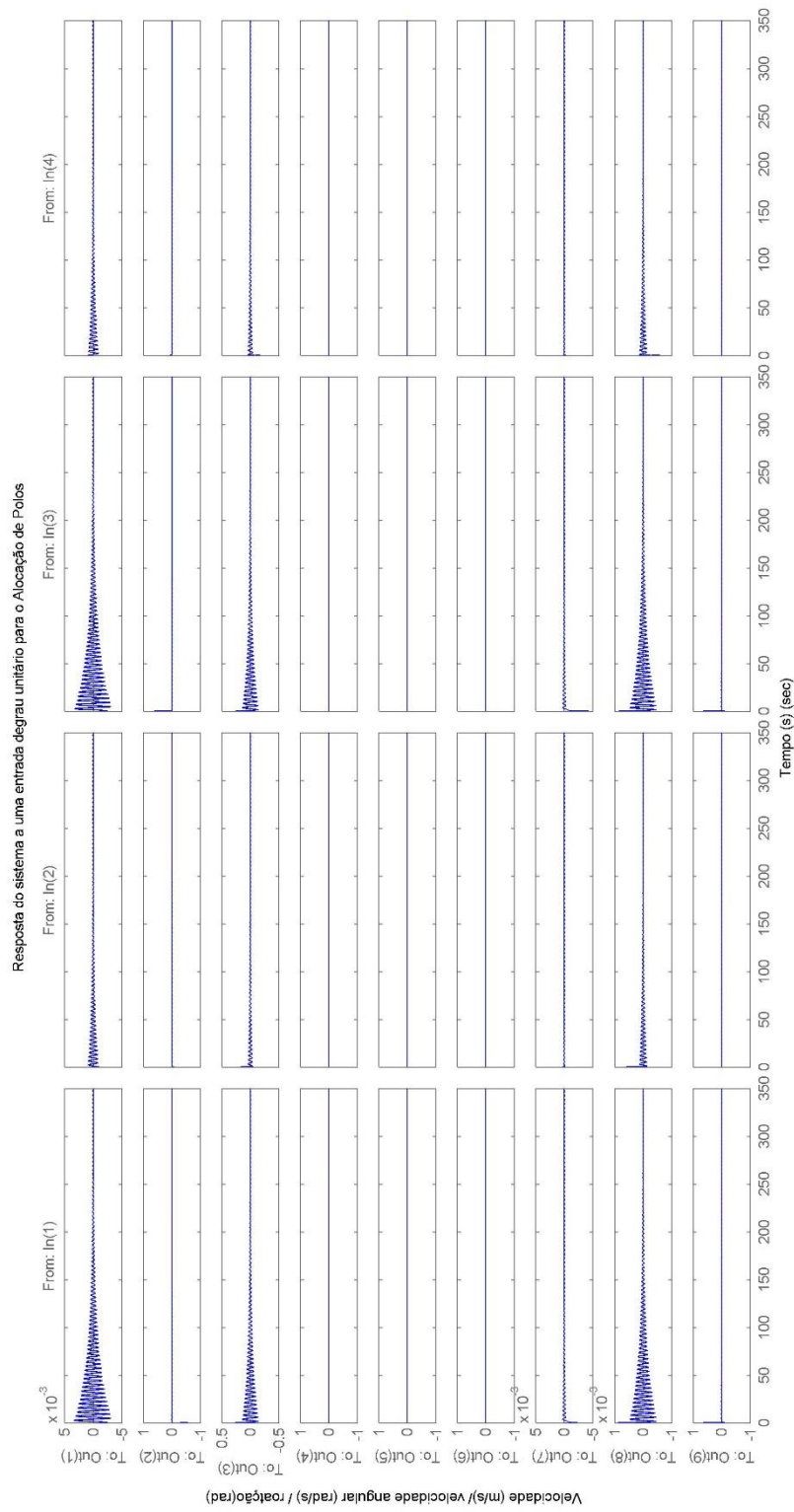


Figura A.3 – Simulação em malha fechada (alocação de polos) para uma entrada tipo degrau unitário em cada uma das entradas

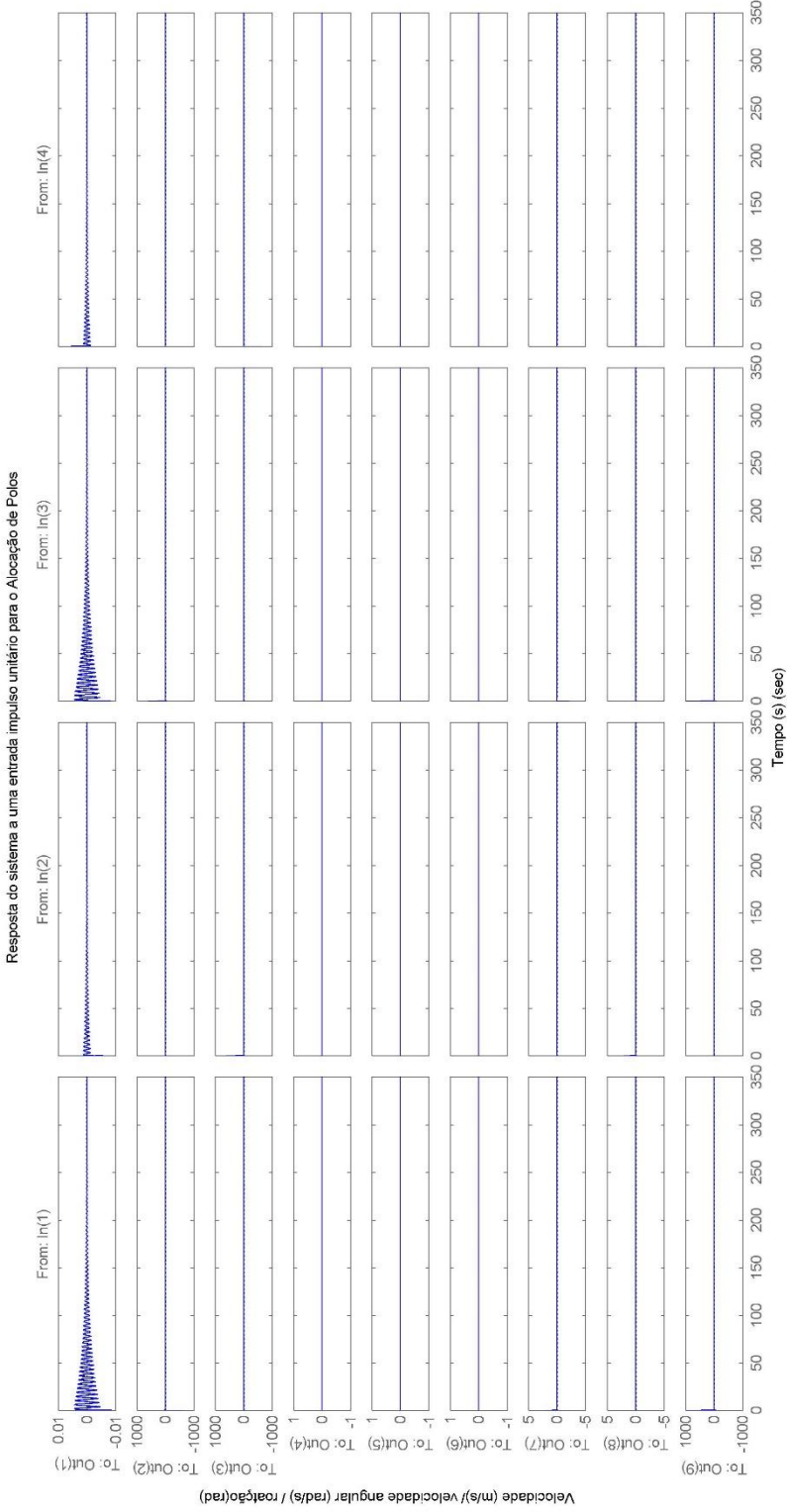


Figura A.4 – Simulação em malha fechada (alocação de polos) para uma entrada tipo impulso unitário em cada uma das entradas

As figura A.1 e A.2 demonstram as saídas de cada um dos estados, conforme convencionado pela equação (5.152) para uma entrada impulso unitário e degrau unitário, respectivamente, aplicadas a cada uma das entradas de controle (deflexões das superfícies de controle). O que se nota é que o sistema é instável dada a divergência dos parâmetros com a aplicação das entradas.

As figura A.3 e A.4, por sua vez, demonstram a resposta dos mesmos sistemas as mesmas entradas agora com aplicação do controle por alocação de polos. Nota-se que todas as variáveis tendem a um valor constante ao longo do tempo após um período transiente de acomodação.

A.2.2. Regulador Linear Quadrático

Diferentemente do método da alocação de polos, o Regulador Linear Quadrático tem como forma de fornecer a matriz de ganhos a determinação de um índice de minimização dado, genericamente, por:

$$I = \int_t^T [x^t(t)Q(t)x(t) + u^t(t)Ru(t)]dt$$

Com Q e R matrizes de ponderação dos estados e das entradas, necessárias para determinação da matriz de ganhos ótima, obtida a partir da solução da equação algébrica de Riccati quando as matrizes dos estados (A) e das entradas (B) não variam com o tempo, caso este aqui abordado. Apresentam-se, nas figura A.5 e A.6 resultados de simulações em malha fechada utilizando a matriz de ganhos ótima. Novamente, dada a adoção de parâmetros não finais ao sistema dinâmico, tidos meramente como exemplo de aplicação, estes resultados devem ser tomados como indicativos da funcionalidade do código implementado, requerendo ainda uma melhor determinação dos parâmetros.

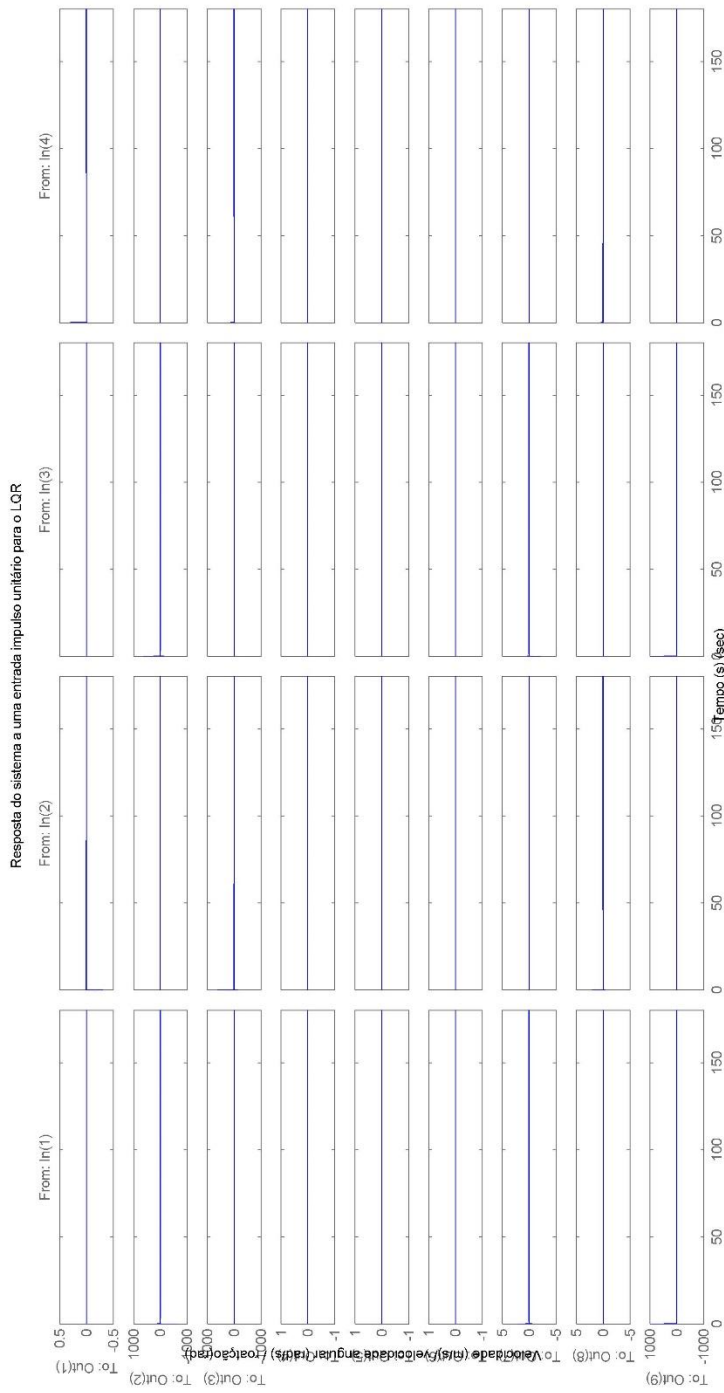


Figura A.5 – Simulação em malha fechada (LQR) para uma entrada tipo impulso unitário em cada uma das entradas

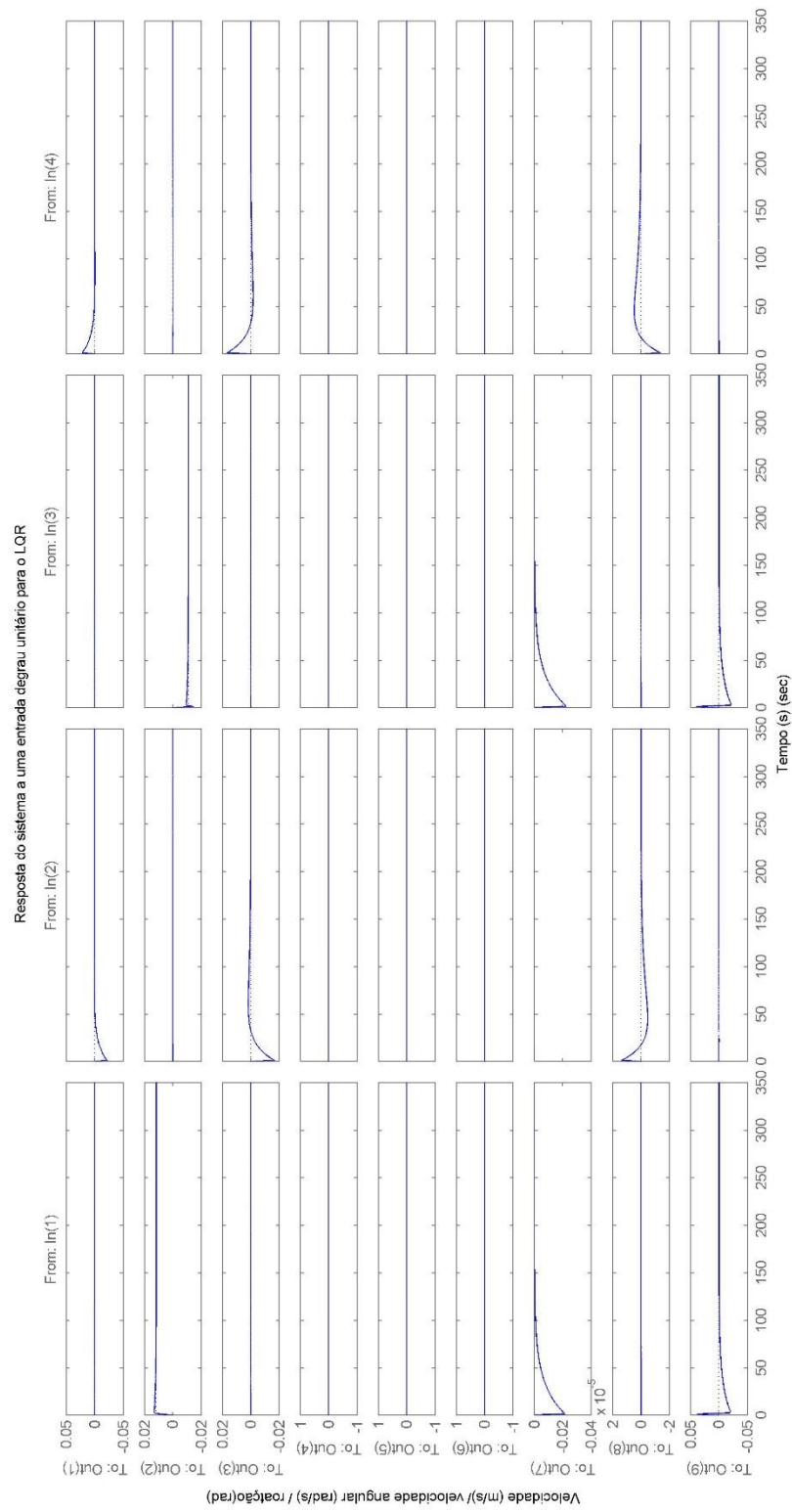


Figura A.6 – Simulação em malha fechada (LQR) para uma entrada tipo degrau unitário em cada uma das entradas

A.3.2ª SÍNTESE DE REGULADOR

A.3.1. Polos do sistema em malha aberta e malha fechada

As simulações aqui realizadas têm como parâmetros de massa do míssil e comprimento, 18 kg (sem combustível) e 1 m de comprimento e 150 mm de diâmetro externo com dois jogos de superfícies aerodinâmicas sendo o controle realizado pelas superfícies de controles traseiras. Vale ressaltar, novamente que não foram possíveis se determinar os coeficientes aerodinâmicos tais como apresentados, desta forma as simulações a serem apresentadas não tem qualquer caráter físico realístico mais tão somente exemplificativo de que se é possível realizar a síntese de um regulador para o problema proposto com a dinâmica deduzida neste trabalho. A estimação dos coeficientes aerodinâmicos foi toda feita com base no com senso, sendo menores os coeficientes que dizem respeito a dinâmica longitudinal do mesmo (por exemplo o coeficiente de arrasto) e os demais significativamente maiores. As propriedades geométricas (momentos e produtos de inércia) foram estimados a partir do modelo tridimensional em CAD. As figuras A.7, A.8 e A.9 trazem os polos e zeros do sistema em malha aberta e com alocação de polos e os obtidos a partir da síntese via regulador linear quadrático com ponderação maior para a velocidades angulares e de atuação.

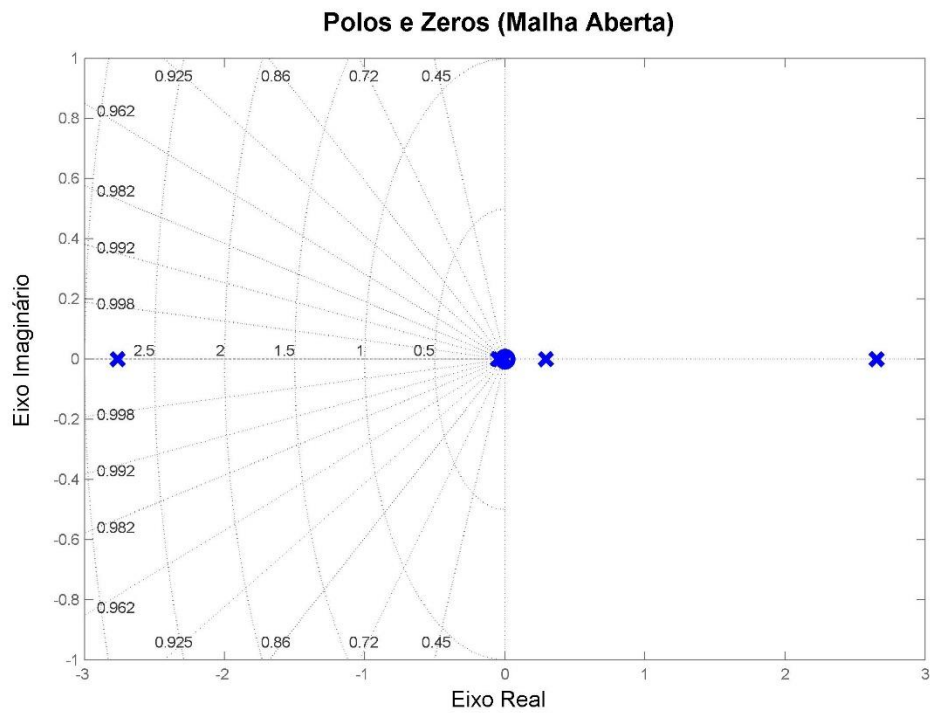


Figura A.7 – Polos em malha aberta (notar que o sistema é instável devido a existência de dois polos com parte real positiva)

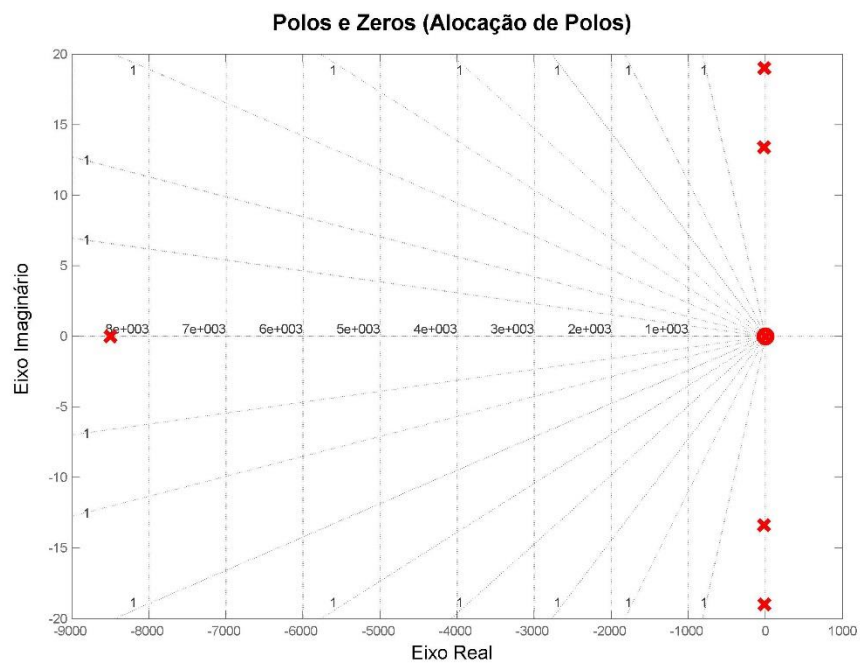


Figura A.8 – Polos obtidos por alocação de polos (notar que há um polo muito a esquerda com dinâmica rápida enquanto todo o sistema tem resposta bastante lenta)

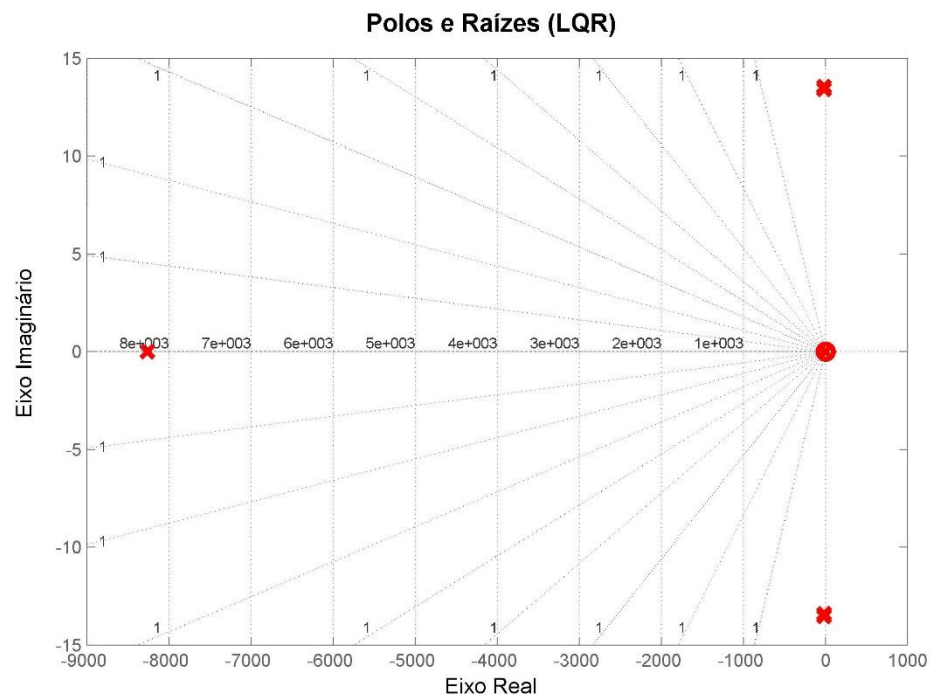


Figura A.9 – Polos obtidos por LQR (notar que há um polo muito a esquerda com dinâmica rápida enquanto todo o sistema tem resposta bastante lenta)

A.3.2. Simulação do comportamento do sistema a uma subida

Assumindo como zero todas as condições de equilíbrio e forçando por 10 segundos a arfagem no sentido de subida do míssil, apresentam-se nas figuras que seguem os resultados obtidos a partir do controle utilizado.



Figura A.10 – Ângulo de arfagem por LQR

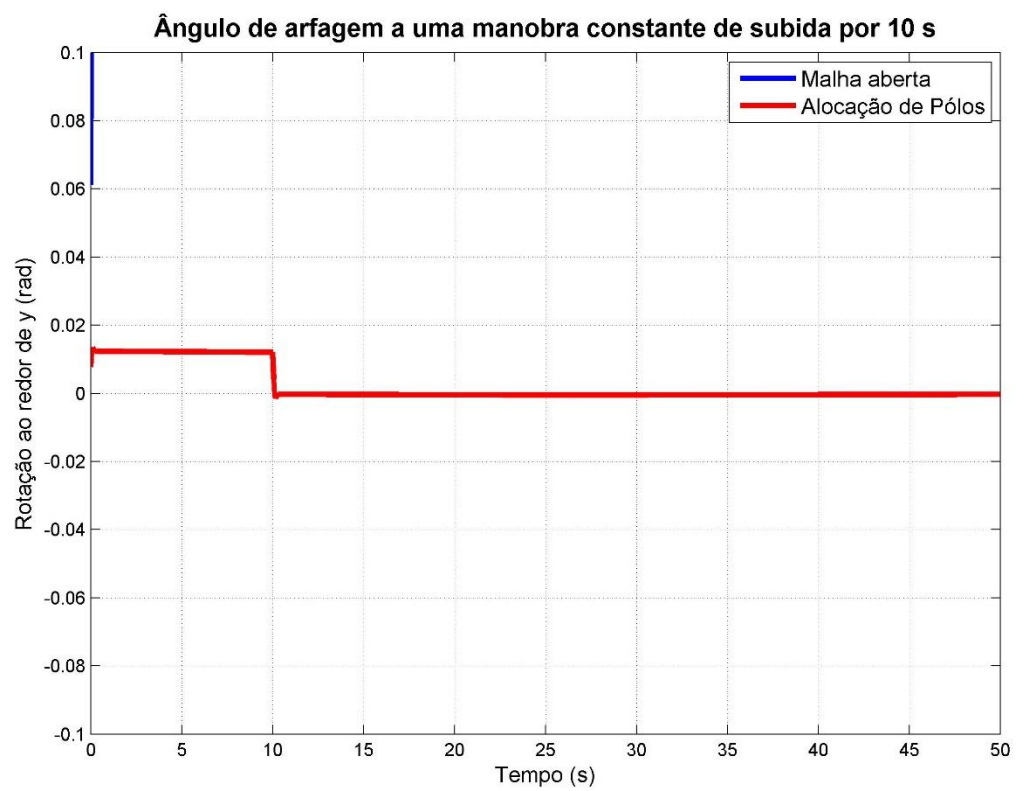


Figura A.11 – Ângulo de arfagem por alocação de polos

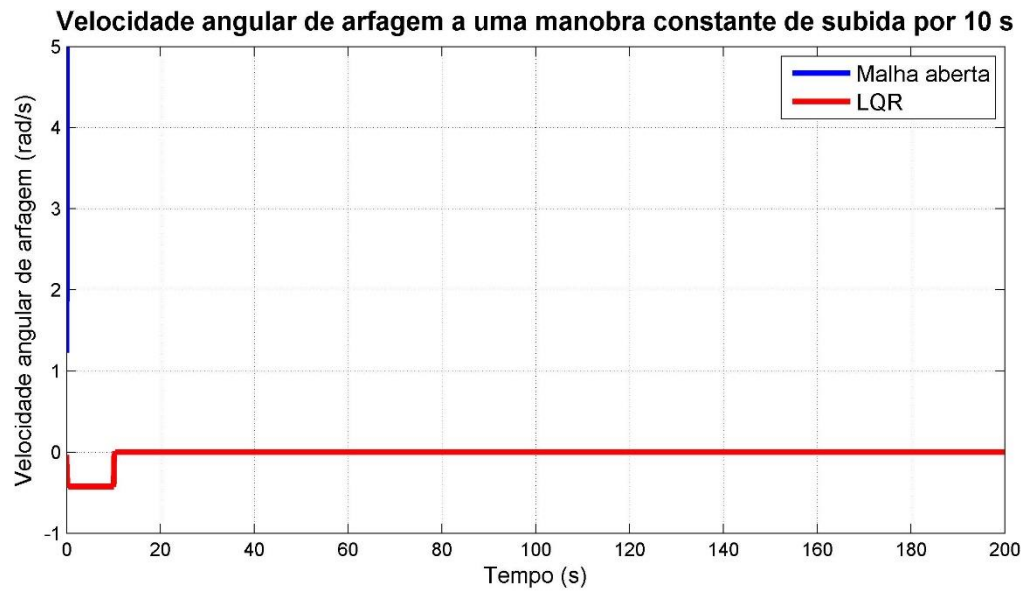


Figura A.12 – Velocidade angular de arfagem por LQR



Figura A.12 – Velocidade angular de arfagem por alocação de polos



Figura A.12 – Velocidade na direção z por LQR



Figura A.12 – Velocidade na direção z por alocação de polos